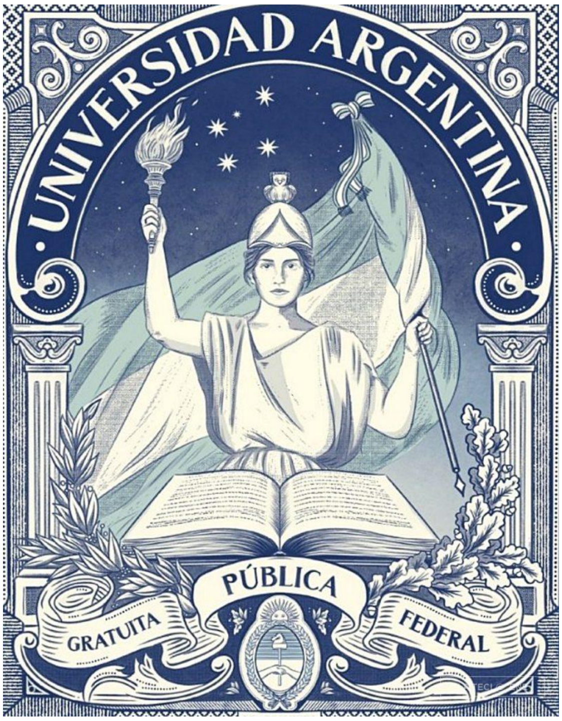
Física de Computación - FAMAF

Severino Di Giovanni

13 de diciembre de 2025

Índice

Figura 1: Severino Di Giovanni, autor de este apunte, te recuerda que siempre seas solidario con tus compañeros, que compartas y te dejes compartir conocimiento, y que defiendas tus derechos estudiantiles. En la Argentina de Milei, la estupidez y el egoísmo son celebradas virtudes, y está en tus manos promover y practicar una ética superadora.


UNIVERSIDAD ARGENTINA
PÚBLICA
GRATUITA
FEDERAL

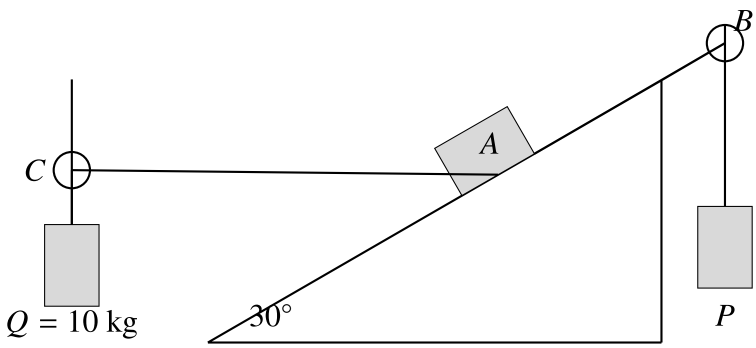
1. Readme

Este apunte puede contener errores. En particular, el capítulo de circuitos no fue corregido. Lea con cuidado y espíritu crítico.

2. Dinámica (P2)

(1) La siguiente figura muestra una masa A de 100 kg, apoyada sobre la superficie de un plano inclinado. No existe rozamiento entre la masa A y la superficie del plano inclinado. La cuerda AB es paralela al plano en que se apoya A, en tanto que la cuerda AC está horizontal. Calcular:

1. el peso del bloque P sabiendo que el sistema está en equilibrio,
2. la reacción del plano sobre el bloque A.



Solución. (1) El vector unitario paralelo al plano es $\hat{k} := (\cos\theta, \sin\theta)$. Como el sistema está en equilibrio, la magnitud de las fuerzas que actúan en dirección paralela al plano inclinado se anulan. Si $\overrightarrow{F}$ es una fuerza, denotamos con $F_{\|} := \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{k}$ su componente paralela al plano. Es fácil ver que

$$
\begin{aligned}
& Q_{\|} + P_{\|} + G_{\|} = 0 \\
\iff \quad & -Q\cos\theta + P - G\sin\theta = 0 \\
\iff \quad & P = m_Q g\cos\theta + m_A g\sin\theta \\
\iff \quad & m_P g = g\left(m_Q\cos\theta + m_A\sin\theta\right) \\
\iff \quad & m_P = m_Q\cos\theta + m_A\sin\theta \\
\iff \quad & m_P = 10\text{kg} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 100\text{kg} \cdot \frac{1}{2} \\
\iff \quad & m_P = (5\sqrt{3} + 50)\text{kg} \\
& m_P = 58{,}6602540378\text{kg}
\end{aligned}
$$

(2) La reacción $\overrightarrow{N}$ debe contrarrestar la magnitud de las fuerzas perpendiculares al plano. Sea $\hat{u} := (-\sin\theta, \cos\theta)$ el vector unitario perpendicular al plano. Claramente, dicho vector es perpendicular a $\overrightarrow{P}$, con lo cual el producto punto entre ambos es cero,

i.e. $\overrightarrow{P}$ no ejerce fuerza alguna perpendicular al plano. Veamos cuál es la componente perpendicular al plano de la gravedad y de $\overrightarrow{Q}$.

- $Q_\perp := \overrightarrow{Q} \cdot \overrightarrow{u} = m_Q g \sin\theta$
- $G_\perp := \overrightarrow{G} \cdot \overrightarrow{u} = -m_A g \cos\theta$

Por lo tanto, la magnitud de $\overrightarrow{N} = N\overrightarrow{u}$ es

$$N = -\left(m_Q g \sin\theta - m_A g \cos\theta\right) = m_A g \cos\theta - m_Q g \sin\theta$$

Calculando:

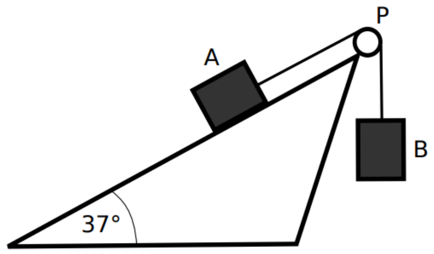
$$\begin{aligned} N &= 100 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 9{,}8\ \mathrm{N} + 10 \cdot \frac{1}{2} \cdot 9{,}8\ \mathrm{N} \\ &= 9{,}8\left(50\sqrt{3} - 5\right)\ \mathrm{N} \\ &= 799{,}704895709\ \mathrm{N} \end{aligned}$$

(2) Un cuerpo de masa $m = 10\text{kg}$ está apoyado en una superficie horizontal sin rozamiento. Una persona tira del bloque con una soga fija al bloque en dirección horizontal con una fuerza de 20N. Calcular la aceleración del bloque suponiendo despreciable la masa de la soga.

Solución. Por Ley de Newton, la suma de las fuerzas actuando sobre un cuerpo equivale a su masa por su aceleración:

$$\begin{aligned} & \sum \overrightarrow{F} = m\overrightarrow{a} \\ \iff \quad & 20\text{N}\hat{\imath} = ma\hat{\imath} \\ \iff \quad & 20\text{N} = ma \\ \iff \quad & \frac{20\text{N}}{10\text{kg}} = a \\ \iff \quad & 2\text{m/s}^2 = a \end{aligned}$$

(4) Un bloque A de masa $m_A = 8\text{kg}$ descansa sobre un plano inclinado con ángulo $\alpha = 37°$, unido con una cuerda y una polea sin rozamiento a un bloque B de masa $m_B = 4\text{kg}$. Determina la aceleración $\vec{a}$ de las masas y la tensión de la cuerda cuando se deja al sistema evolucionar libremente. Realice un diagrama de cuerpo aislado.



Solución.

(Aceleración de masa A.) La masa A es afectada por la gravedad y por la tensión de la cuerda en dirección paralela a la pendiente. Su aceleración es también paralela a la pendiente.

$$G_{\parallel} + T = ma \iff -m_A g \sin\alpha + T = m_A a_A$$

(Aceleración de la masa B.) De manera análoga,

$$-m_B g + T = m_B a_B$$

Esto define un sistema de dos ecuaciones con tres incógnitas, T, a_A, a_B. Pero es fácil observar que $a_A = -a_B$. Con lo cual nos reducimos a dos incógnitas y tenemos un sistema que se puede resolver. Despejando T en la ecuación para la aceleración de B, obtenemos $T = m_B a_B + m_B g = m_B(a_B + g)$. Sustituyendo en la primer ecuación,

$$
\begin{aligned}
& m_A a_A = -m_A g \sin\theta + m_B(a_B + g) \\
\iff \quad & m_A a_A = -m_A g \sin\theta + m_B a_B + m_B g \\
\iff \quad & m_A a_A = -m_A g \sin\theta - m_B a_A + m_B g && \{a_B = -a_A\} \\
\iff \quad & m_A a_A + m_B a_A = -m_A g \sin\theta + m_B g \\
\iff \quad & a_A(m_A + m_B) = -m_A g \sin\theta + m_B g \\
\iff \quad & a_A = \frac{-m_A g \sin\theta + m_B g}{m_A + m_B} \\
\iff \quad & a_A = -g \cdot \frac{m_A \sin\theta - m_B}{m_A + m_B} \\
\iff \quad & a_A = -0{,}66519148459\text{m/s}^2 && \{\text{Con calculadora}\}
\end{aligned}
$$

Ahora que ya sabemos a_A, podemos despejar T:

$$
\begin{aligned}
T &= m_B(a_B + g) \\
&= m_B(-a_A + g) \\
&= 41{,}8607659384\text{N}
\end{aligned}
$$

(5) Dos bloques de masas m_1, m_2 están en contacto sobre una mesa sin rozamiento. Una fuerza $\overrightarrow{F}$ se aplica sobre el primero.

(a) Encontrar la aceleración del sistema y la fuerza de contacto entre los bloques. Evaluar para $m_1 = 2$kg, $m_2 = 1$kg, $F = 3$N.

(b) Muestre que si la misma fuerza $\overrightarrow{F}$ se aplica en sentido contrario, i.e. sobre m_2 en lugar de m_1, la fuerza de contacto será distinta.

Solución. (a) Modelamos todo como un único sistema de masa $m = m_1 + m_2 = 3$kg. Se tiene 3N $= ma$ de lo cual se sigue que $a = 1$m/s^2.

(b) Si aplicamos la fuerza sobre la primera masa, la segunda masa recibirá una aceleración producida por la fuerza de contacto: $F_{\text{contacto}} = m_2 a$. So hacemos lo inverso, la fuerza de contacto sobre la primera masa será $F_{\text{contacto}} = m_1 a$. Como las masas son distintas, estas fuerzas de contacto también lo sono.

(6) Una bola de masa $m = 10$kg cuelga atada al techo de un auto. La tensión máxima que la soga soporta sin romperse es 500N. ¿Cuál es la máxima aceleración horizontal que puede alcanzar el auto sin que se corte la cuerda? Determina el ángulo entre la cuerda y la vertical para esa aceleración máxima.

Solución. (Ac. máxima) Las fuerzas que actúan sobre la bola son la tensión de la soga y la gravedad, y debería ser claro que, una vez que la soga se tensa, la aceleración del auto es la aceleración de la bola. Tenemos:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{G} + \overrightarrow{T} = m\overrightarrow{a} &\iff \overrightarrow{T} = m\overrightarrow{a} - \overrightarrow{G} \\ &\iff \overrightarrow{T} = ma\hat{\imath} + mg\hat{\jmath} \end{aligned}$$

Nos dicen que la soga se rompe si la tensión es 500N, i.e. si

$$\begin{aligned} & \sqrt{T_x^2 + T_y^2} = 500\text{N} \\ \iff \quad & \sqrt{m^2a^2 + m^2g^2} = 500\text{N} \\ \iff \quad & m^2a^2 + m^2g^2 = 250000\text{N} \\ \iff \quad & a^2 = \frac{250000\text{N} - m^2g^2}{m^2} \\ \iff \quad & a^2 = \frac{250000\text{N}^2 - 9604\text{N}^2}{100\text{kg}^2} \\ \iff \quad & a^2 = \frac{240396\text{N}^2}{100\text{kg}^2} \\ \iff \quad & a^2 = 2403{,}96\ (\text{N}/kg)^2 \\ \iff \quad & a = 49{,}0301947783\text{m/s}^2 \end{aligned}$$

(Ángulo de ac. máxima) Asumamos que la aceleración máxima $a_{\max}$ es alcanzada. Sabemos que el ángulo θ entre $\overrightarrow{T}$ y la vertical satisface

$$\overrightarrow{T} \cdot \hat{\jmath} = T\cos\theta$$

Pero $\overrightarrow{T} \cdot \hat{\jmath} = T_y = mg$. Por ende,

$$mg = T\cos\theta \iff \cos\theta = \frac{mg}{T}$$

Si asumimos que $a = a_{\max}$, entonces $T = 500\text{N}$ por dato del problema. Es decir,

$$\cos\theta = \frac{10 \cdot 9{,}8}{500\text{N}} = 0{,}196$$

Y como $\arcsin(0{,}196) = 0{,}197277126\text{rad}$, este es el ángulo entre $\overrightarrow{T}$ y la vertical.

(9) Un bloque de masa m se desliza sobre el suelo mientras una fuerza de magnitud 12N tira del mismo formando un ángulo θ con la horizontal. $\mu_d = 0{,}4$. $\theta \in [0, \pi/2]$. El bloque siempre permanece sobre el suelo. Hallar θ que maximiza la aceleración.

Solución. Sea $\overrightarrow{E}$ la fuerza que empuja la masa. $\overrightarrow{N}$ es la reacción del suelo que contrarresta las fuerzas que empujan la masa hacia abajo. Como la masa permanece en el suelo siempre,

$$N - G + E\sin\theta = 0 \iff N = G - E\sin\theta$$

La aceleración horizontal es dada por

$$\begin{aligned} ma &= \overrightarrow{E} \cdot \hat{\imath} - R \\ &= E\cos\theta - \mu_d\,[mg - E\sin\theta] \\ &= E\cos\theta - \mu_d mg + \mu_d E\sin\theta \end{aligned}$$

Es decir, la aceleración horizontal para un ángulo θ dado es

$$a(\theta) = \frac{E\cos\theta + \mu_d E\sin\theta - \mu_d mg}{m}$$

La derivada respecto a θ es

$$\frac{da}{d\theta} = -\frac{E}{m}\sin\theta + \mu_d\frac{E}{m}\cos\theta = \frac{E}{m}\left(-\sin\theta + \mu_d\cos\theta\right)$$

Igualando la derivada a cero,

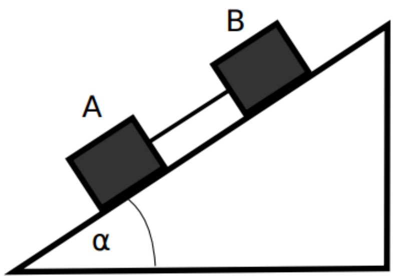
$$\begin{aligned} &\frac{da}{d\theta} = 0 \\ \iff& -\sin\theta + \mu_d\cos\theta = 0 \\ \iff& \mu_d\cos\theta = \sin\theta \\ \iff& \mu_d = \tan\theta \end{aligned}$$

Por ende, el ángulo θ que maximiza $a(\theta)$ es $\arctan(\mu_d) = \arctan(0{,}4)$.

(10) Un bloque de masa m_A, m_B se deslizan por un plano inclinado, unidos por una cuerda sin masa, donde m_A arrastra a m_B. El ángulo de inclinación es θ, hay fricción con coeficiente μ_A para A y μ_B para B.

(a) Encuentre una expresión para $\overrightarrow{T}$ la tensión de la cuerda.

(b) Encuentre una expresión para $\overrightarrow{a}$.



Solución.

(a) Me salteo los cálculos previos. No es difícil determinar que $a_A = a_B =: a$ y que

$$
\begin{aligned}
m_A a &= T - m_A g \sin\theta + R_A \\
m_B a &= -T - m_B g \sin\theta + R_B
\end{aligned}
$$

con $\overrightarrow{R}$ la fuerza de rozamiento. No es difícil ver que la componente perpendicular a la superficie de la gravedad es $-mg\sin\theta$. Por ende, $N = mg\sin\theta$ (contrarresta la gravedad). Por ende $R = \mu \cdot mg\cos\theta$. Luego

$$
\begin{aligned}
m_A a &= T - m_A g \sin\theta + \mu \cdot m_A g \cos\theta \\
m_B a &= -T - m_B g \sin\theta + \mu \cdot m_B g \cos\theta
\end{aligned}
$$

Si sumamos ambas ecuaciones, obtenemos

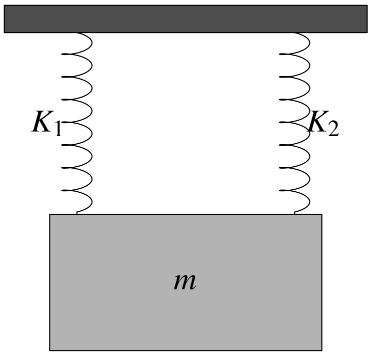
$$
\begin{aligned}
a(m_A + m_B) &= -m_A g \sin\theta - m_B g \sin\theta + \mu_A \cdot m_A g \cos\theta + \mu_B \cdot m_B g \cos\theta \\
&= -g \sin\theta \left[m_A + m_B\right] + g \left[\mu_A \cdot m_A \cos\theta + \mu_B m_B \cos\theta\right] \\
&= g \left[-\sin\theta \left(m_A + m_B\right) + \cos\left(\mu_A m_A - \mu_B m_B\right)\right] \\
\Rightarrow \quad a &= g \cdot \frac{\cos\theta \left[\mu_A m_A + \mu_B m_B\right] - \sin\theta \left[m_A + m_B\right]}{m_A + m_B} \\
&= -g \sin\theta + \frac{g \cos\theta \left[\mu_A m_A + \mu_B m_B\right]}{m_A + m_B}
\end{aligned}
$$

Ahora que sabemos a, podemos dar:

$$
\begin{aligned}
T &= m_A a + m_A g \sin\theta - \mu \cdot m_A g \cos\theta \\
&= m_A \left[a + g \sin\theta - \mu g \cos\theta\right] \\
&= m_A \left[a + g \left(\sin\theta - \mu \cos\theta\right)\right]
\end{aligned}
$$

Si un alma quiere hacerlo, sustituir a por toda la expresión dada antes y simplificar. Lo considero innecesario.

Problema 12. Dos resortes de longitudes naturales $L_0 = 0{,}5\,\text{m}$ pero con diferentes constantes elásticas, $K_1 = 50\,\text{N/m}$ y $K_2 = 100\,\text{N/m}$, se encuentran colgados del techo. Un cuerpo de masa $m = 2{,}5\,\text{kg}$ que inicialmente está suspendido de ellos es estirado hacia abajo hasta que la longitud de los resortes se duplica. ¿Cuál es la aceleración $\overrightarrow{a}$ que adquiere el cuerpo cuando se deja libre?



Solución. Sobre los cuerpos actúa la fuerza de cada resorte y la gravedad, todas en dirección estrictamente vertical:

$$\overrightarrow{F} = \overrightarrow{G} + \overrightarrow{R_1} + \overrightarrow{R_2} = m\overrightarrow{a}$$

La fuerza generada por un resorte es $-k\Delta\overrightarrow{r}$ con $\Delta\overrightarrow{r}$ el desplazamiento desde la posición de relajación. En nuestro caso, se nos dice que la posición de relajación es 0,5m, y que los resortes se estiran hasta 1m hacia abajo. Es decir, en un sistema de coordenadas donde la altura $y = 0$ se corresponde con el techo, $\Delta\overrightarrow{r} = (y_{\text{actual}} - y_{\text{relajamiento}}) = (-1\text{m} - (-0{,}5\text{m})) = -\frac{1}{2}\text{m}$. Como $\Delta\overrightarrow{r}$ es negativo, $-k\Delta\overrightarrow{r}$ es positivo y ambos resortes hacen fuerza hacia arriba, lo cual tiene sentido físico. Además, como $[k] = \text{N/m}$, $\left[-k\Delta\overrightarrow{r}\right] = \text{N}$, lo cual también tiene sentido porque es la fuerza.

$$\overrightarrow{R_1} = \frac{K_1}{2}\text{m}\ \hat{j}, \qquad \overrightarrow{R_2} = \frac{K_2}{2}\text{m}\ \hat{j}$$

En conclusión,

$$ma = -mg + \frac{K_1}{2}\text{m} + \frac{K_2}{2}\text{m}$$

Sustituyendo,

$$
\begin{aligned}
ma &= -2{,}5\text{kg} \cdot 9{,}8\text{m/s}^2 + 25\text{N} + 50\text{N} \\
&= -24{,}5\text{N} + 75\text{N} \\
&= 50{,}5\text{N} \\
\Rightarrow \quad a &= \frac{50{,}5\text{N}}{2{,}5\text{kg}} \\
&= 20{,}2\text{m/s}^2
\end{aligned}
$$

(13) Un resorte de constante elástica k tiene un extremo fijo y el otro coincide con el punto x_0 cuando no está deformado. A este extremo se adhiere una masa m que se desplaza hasta x_1, donde se la suelta. $k = 8\text{N/m}, m = 2\text{kg}, x_0 = 40\text{cm}, x_1 = 55\text{cm}$.

(a) Determine las funciones de movimiento, velocidad y aceleración respecto al tiempo.

(b) Determine el período, la frecuencia, las coordenadas extremas del movimiento, y el módulo de la velocidad de la masa m en el punto de equilibrio.

Solución. (a) Una vez soltado, el resorte realiza un movimiento oscilatorio armónico. Sabemos que dicho movimiento satisface, con $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$,

$$a(t) = -\omega^2(x(t) - x_0), \qquad v(t) = \omega A \cos(\omega t + \phi), \qquad x(t) = x_0 + A \sin(\omega t + \phi)$$

Las condiciones del problema establecen:

1. $x(t = 0) = x_1$
2. $v(t = 0) = 0$

De la segunda condición, obtenemos

$$v(t = 0) = \omega A \cos(\phi) = 0 \iff A = 0 \lor \cos \phi = 0$$

Si $A = 0$ entonces $x(t = 0) = x_0$, lo cual es absurdo por lo establecido en la condición (1). Por ende, se debe cumplir $\cos \phi = 0$, es decir $\phi = \frac{\pi}{2}$ o $\phi = \frac{3\pi}{2}$.

Ahora bien, como $x(t = 0) = x_1$, tenemos

$$x_1 = x_0 + A \sin(\phi), \qquad \phi \in \left\{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right\}$$

Es decir que $x_1 = x_0 + A$ o bien $x_1 = x_0 - A$. Si asumimos, sin pérdida de generalidad, que la constante A es positiva, debe cumplirse $x_1 = x_0 + A$, pues $x_1 > x_0$. Es decir que tenemos $\phi = \pi/2$. Ahora se sigue trivialmente que $A = x_1 - x_0 = 15\text{cm}$.

Ahora que hemos encontrado A y ϕ, observamos que

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{8\text{N/m}}{2\text{kg}}} = 2\text{s}^{-1}$$

Entonces

$$\begin{aligned}
x(t) &= 40\text{cm} + 15\text{cm} \cdot \sin\left(2\text{s}^{-1} \cdot t + \frac{\pi}{2}\right)\\
v(t) &= 15\text{cm} \cdot 2\text{s}^{-1} \cdot \cos\left(2\text{s}^{-1} \cdot t + \frac{\pi}{2}\right)\\
a(t) &= -4\text{s}^{-2} \cdot (x(t) - 40\text{cm})
\end{aligned}$$

Ahora bien, el coseno desplazado por una fase de $\pi/2$ es el seno, y el seno desplazado por una fase de $\pi/2$ es el coseno. Podemos simplificar:

$$\begin{aligned}
x(t) &= 40\text{cm} + 15\text{cm} \cdot \cos\left(2\text{s}^{-1} \cdot t\right)\\
v(t) &= 15\text{cm} \cdot 2\text{s}^{-1} \cdot \sin\left(2\text{s}^{-1} \cdot t\right)\\
a(t) &= -4\text{s}^{-2} \cdot (x(t) - 40\text{cm})
\end{aligned}$$

(b) El período es $2\pi/\omega$ por definición, i.e. $2\pi/2\text{s} = \pi/\text{s}$. El movimiento completa un ciclo (va de un extremo a otro) cada π segundos. La frecuencia es la inversa del período, $F = \frac{1}{\pi}\text{s}$, i.e. el sistema hace $\frac{1}{\pi}$ oscilaciones por segundo.

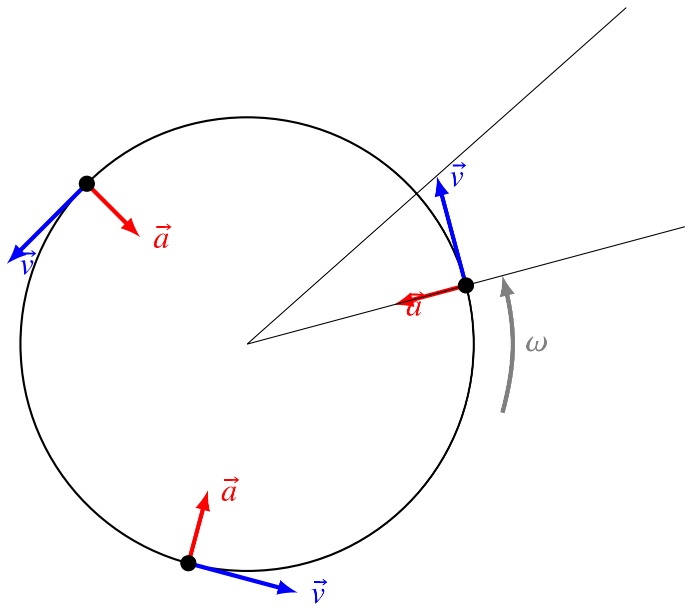
Claramente, $x(t)$ es máximo cuando $\cos(2t) = 0$, i.e. para $t = 0\text{s}$. Es mínimo cuando $\cos(2t) = -1$, i.e. cuando $2t = \pi$ o bien $t = \pi/2\text{s}$.

Observemos ahora que $x(t_0) = x_0$ si y solo si $\cos\left(2\text{s}^{-1} \cdot t_0\right) = 0$. Esto se cumple si (aunque no solo si) $t_0 = \frac{\pi}{4}\text{s}$. Por ende, ese es un instante de tiempo en que la masa está en el punto de equilibrio. La velocidad en dicho punto es

$$\begin{aligned}
v\left(\frac{\pi}{4}\right) &= 15\text{cm} \cdot 2\text{s}^{-1} \cdot \cos\left(2\text{s}^{-1} \cdot \frac{\pi}{4}\text{s} + \frac{\pi}{2}\right)\\
&= 0{,}15\text{m} \cdot 2\text{s}^{-1} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right)\\
&= 0{,}3\text{ms}^{-1} \cdot \cos(\pi)\\
&= -0{,}3\text{m/s}
\end{aligned}$$

La magnitud de la velocidad es de 0,3m/s.

(14). Sobre una superficie horizontal se fija un extremo de un resorte que tiene una longitud natural de 0.5 m y cuya constante elástica es 400 N/m. Al otro extremo se une un cuerpo de 2 kg de masa que se mueve de forma tal que describe una trayectoria circular. (a) Si el radio de la circunferencia es de 1 m, ¿Cual sera la velocidad del cuerpo? (b) Si se duplica la velocidad, ¿Cual deberíaa ser el nuevo radio?



Solución. En un instante dado, sea $\hat{\imath}$ unitario y paralelo a la aceleración (centrípeto). Entonces $\vec{a} = a\hat{\imath}$, $\vec{R} = R\hat{\imath}$, con $\vec{R}$ la fuerza del resorte. Se sigue

$$\begin{aligned} & \vec{a}\, m = \vec{R} \\ \iff \quad & a = \frac{R}{m} \\ \iff \quad & a = 100\text{m/s}^2 \end{aligned}$$

puesto que $R = \left|\vec{R}\right| = k/2$. En el movimiento circular uniforme, se satisface

$$a = v^2/r$$

Por ende $100\text{m/s}^2 \cdot 1\text{m} = v^2$, de lo cual se sigue $v = 10\text{m/s}$.

(b) Si la velocidad se duplica, se tiene $v = 20\text{m/s}$. Ahora la aceleración, que depende del resorte, es (en magnitud):

$$a = \frac{k}{m}\left(r - \frac{1}{2}\mathrm{m}\right)$$

Se tiene entonces

$$\frac{k}{m}\left(r - \frac{1}{2}\mathrm{m}\right) = \frac{400\mathrm{m/s^2}}{r}$$

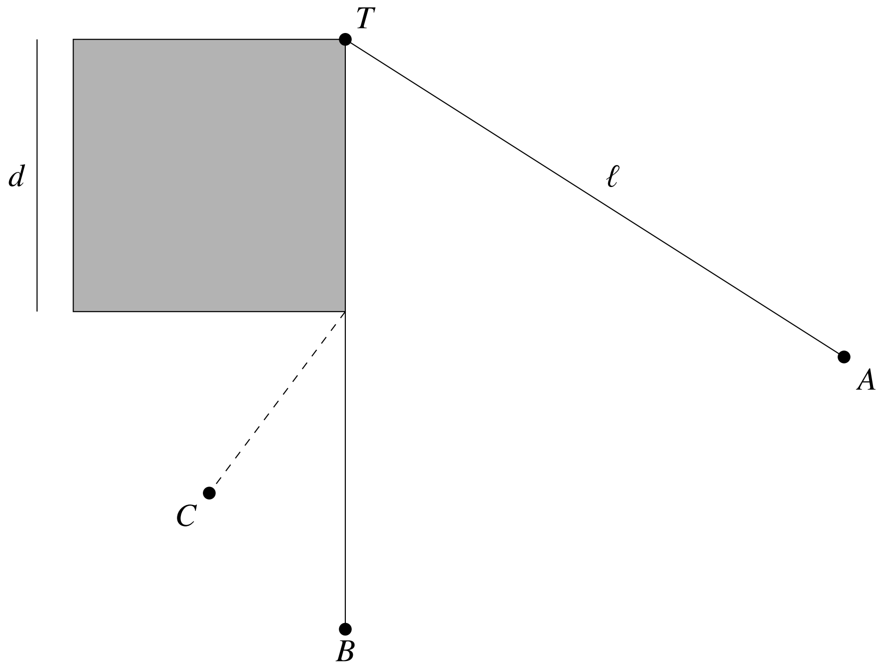
cuya única incógnita es r. Obviando las unidades por simplicidad, no es difícil ver que esta ecuación se reduce a la siguiente cuadrática:

$$r^2 - \frac{1}{2}r - 2 = 0$$

Encontramos las raíces y nos quedamos sólo con la raíz positive $r_0 \approx 1{,}686$, con lo cual determinamos r.

3. Trabajo y energía (P3)

(1) Una masa pequeña se coloca al final de la cuerda de largo $\ell = 132$cm y se suelte desde el reposo. Sabiendo que $\theta_A = 5°$, $d = 66$cm:



Determinar:

(a) La velocidad en el punto más bajo de la trayectoria.

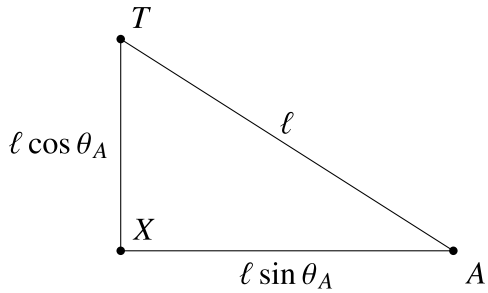
(b) El valor de θ_C para la máxima altura que alcanza la masa (punto C).

(c) La tensión de la cuerda en la posición B.

Solución. Por conservación de la energía, E permanece constante tanto cuando lo masa está en A como cuando la masa está en B. Pero la energía en A es estrictamente potencial, pues no hay velocidad; y la energía en B es estrictamente kinética, pues B es el punto de reposo. Por ende,

$$mgA_y = \frac{1}{2}mv_B^2$$

con A_y la altura de A respecto al punto de reposo B y v_B la velocidad de la masa al atravesar el punto B. Si determinamos A_y, ya podemos resolver para v_B. La altura A_y es fácil de determinar si tomamos el triangulo aislado formado por T, A y la líean del punto B:



Como el largo desde T a B también es ℓ (la hipotenusa es la soga), se sigue que $A_y = \ell - \ell\cos\theta_A \approx 0{,}502$cm. Por ende,

$$\begin{aligned}
& mgA_y = \frac{1}{2}mv_B^2 \\
\iff\quad & 2g(\ell - \ell\cos\theta_A) = v_B^2 \\
\iff\quad & 2\cdot 9{,}8\text{m/s}^2\,(1{,}32\text{m} - 1{,}32\text{m}\cdot\cos 5^\circ) \\
\iff\quad & 0{,}09845077097\text{m}^2/\text{s}^2 = v_B^2 \\
\iff\quad & 0{,}31376865836\text{m/s} = v_B
\end{aligned}$$

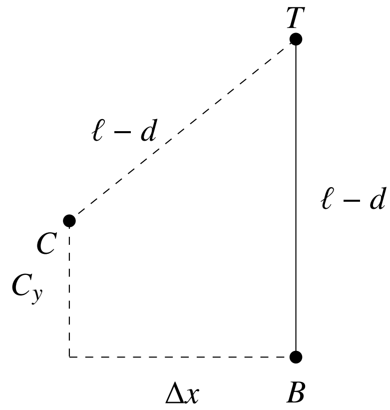
(b) Se nos dice que la altura máxima que alcanza la masa es la de C, con lo cual sabemos que en C se detiene y la velocidad de la masa es cero ($v_C = 0$). Mismo razonamiento que antes: en C la energía es estrictamente potencial, pero en B es estrictamente kinética. Por preservación de la energía,

$$E_B = E_C \iff \frac{1}{2}mv_B^2 = mgC_y$$

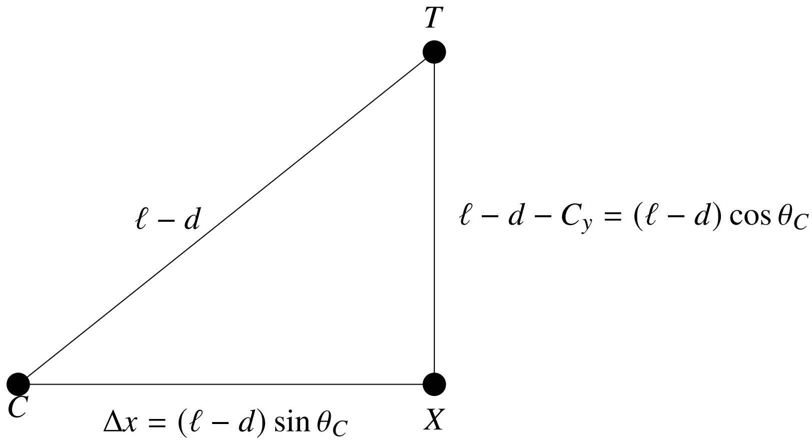
con C_y la altura alcanzada en C. Pero conocemos v_B. Tomando la aproximación $v_B \approx 0{,}314$, tenemos

$$C_y = \frac{\frac{1}{2}(0{,}314)^2(\text{m/s})^2}{9{,}8\text{m/s}^2} = 0{,}00503040816\text{m} \approx 0{,}503\text{cm}$$

Para expresar lo que sabemos en un gráfico, tenemos:



Es claro que si formamos un triángulo rectángulo uniendo C a la línea BT, dicho triángulo satisface



La ecuación a la derecha nos permite resolver para θ_C:

$$\begin{aligned}
\ell - d - C_y = (\ell - d)\cos\theta_C &\iff \cos\theta_C = \frac{\ell - d - C_y}{\ell - d} \\
&\iff \cos\theta_C = 1 - \frac{C_y}{\ell - d} \\
&\iff \cos\theta_C = 1 - \frac{0{,}503\text{cm}}{132\text{cm} - 66\text{cm}} \\
&\iff \cos\theta_C = 0{,}99237878787 \\
&\iff \theta = 0{,}123538758
\end{aligned}$$

(c) En el punto B, la aceleración es constante y la velocidad horizontal. Por ende, el conjunto de fuerzas $\overrightarrow{F}$ se describe como $F_y\hat{\jmath}$. Las únicas fuerzas en acción son la gravedad y la tensión, y por lo tanto

$$F_y = G_y + T_y$$

Sabemos que $G_y = -mg$. Por ende,

$$am = -mg + T_y \iff a = -g + \frac{T_y}{m}$$

Ahora bien, el movimiento de la masa describe un movimiento circular uniforme y por ende satisface $a = \frac{v^2}{r}$. En esta situación en particular, v se refiere a v_B la velocidad en el punto B, y $r = \ell$ la longitud de la soga. Por ende, se tiene

$$\frac{v_B^2}{\ell} = -g + \frac{T_y}{m}$$

De esto se sigue

$$T_y = m\left(\frac{v_B^2}{\ell} + G\right)$$

Sustituyendo,

$$T_y = m\left(\frac{0{,}314^2}{132}\text{m/s}^2 + 9{,}8\text{m/s}^2\right) = m(9{,}80074693939\text{m/s}^2)$$

Como $[m] = \text{kg}$, se tiene correctamente $[T] = \text{N}$.

(2) Un bloque de 20kg es empujado sobre una superficie horizontal por medio de una fuerza $\vec{F}$ que forma un ángulo θ con la misma. La magnitud de la fuerza cuando la masa está en la posición x es $\left|\vec{F}(x)\right| = 6x$N.

(a) Calcular el trabajo realizado por la fuerza en el intervalo $x \in [10\text{m}, 20\text{m}]$.

(b) Calcule la energía cinética del cuerpo en la posición final para $\mu_d = 0, \mu_d = 0{,}05$, asumiendo que se parte del reposo.

Solución. El trabajo realizado por una fuerza constante sobre un cuerpo $\overrightarrow{F}$ es $W_F = \overrightarrow{F} \cdot \Delta\overrightarrow{r}$, con Δr el desplazamiento que la fuerza obra sobre el cuerpo. Pero $\overrightarrow{F}$ en nuestro caso no es constante. Por ende,

$$\begin{aligned}
W_F &= \int_{10}^{20} \left|\vec{F}(x)\right| \cos\theta \; dx \\
&= 6\text{N}\cos\theta \int_{10}^{20} x \; dx \\
&= 6\text{N}\cos\theta \left[\frac{x^2}{2}\right]_{10}^{20} \\
&= 6\text{N}\cos\theta\,(150\text{m}) \\
&= 900\cos\theta\text{Nm} \\
&= 900\cos\theta \text{ J}
\end{aligned}$$

(b)

> **Nota.** Entiendo que el ejercicio pide desde $x = 0$m hasta $x = 20$m. De cualquier modo, el procedimeinto es esl mismo para un desplazamiento desde $x = 10$m hasta $x = 20$m.

Recordemos que $W = \Delta K$. Pero la energía cinética en el instante cero es nula y por lo tanto resulta $W = K_f$. Es decir, la energía cinética en el instante final es el trabajo neto de las fuerzas a lo largo de todo el recorrido:

$$W = W_F + W_R$$

con W_R el trabajo realizado por la fuerza de rozamiento. El ángulo entre la fuerza de rozamiento y la dirección del movimiento es de 180 grados, pues se oponen, y por ende su coseno es -1. Es decir que la fuerza de rozamiento hace un trabajo negativo:

$$
\begin{aligned}
W_R &= -\left|\vec{R}\right| \Delta x \\
&= -\mu \left|\vec{N}\right| 20\text{m} \\
&= -\mu m g 20\text{m} \\
&= -\mu(20 \cdot 9{,}8 \cdot 20)(\text{kg} \cdot \text{m/s}^2 \cdot \text{m}) \\
&= -\mu 3920 \text{ J}
\end{aligned}
$$

Por el mismo razonamiento que antes,

$$W_F = 6\text{N} \cos\theta \int_0^{20} x\ dx = 1200 \cos\theta \text{ J}$$

Por lo tanto,

$$W = 1200 \cos\theta \text{ J} - \mu 3920 \text{ J}$$

3. Una masa de 1 kg se deja deslizar por un plano inclinado 30°, desde una altura de 1 m. Calcule:

(a) La velocidad del bloque cuando llega al piso, suponiendo que no hay rozamiento.

(b) La velocidad del bloque cuando llega al piso, si el coeficiente de rozamiento es $\mu_d = 0{,}3$.

(c) Compare el valor obtenido en (a) con el que se obtiene si se deja caer el bloque desde la misma altura, pero en caída libre.

(d) Para el caso del punto (b) calcule la pérdida de energía.

Solución. (a) La energía en el instante cero es estrictamente potencial y dada por la gravedad: $E_{\text{inicial}} = mg\Delta y$. La energía final es estrictamente kinética: $E_{\text{final}} = \frac{1}{2}mv_f^2$. Por conservación de la energía, estas cantidades son iguales:

$$
\begin{aligned}
& \frac{1}{2}mv_f^2 = mg\Delta y \\
\iff \quad & v_f = \sqrt{2g\Delta y} \\
\iff \quad & v_f = \sqrt{9{,}8 \cdot 2 \cdot 1} \text{ m/s} \\
\iff \quad & v_f = 4{,}42718872424 \text{ m/s}
\end{aligned}
$$

(b) La fuerza de rozamiento es no-conservativa y por ende ya no se satisface $E_{\text{final}} = E_{\text{inicial}}$, sino $E_{\text{final}} < E_{\text{inicial}}$ (cierta cantidad de energía se disipa en forma de calor, sonido, etc.)

Pero sabemos que $W = \Delta K$, i.e. el trabajo total equivale al cambio en la energía cinética. Para calcular el trabajo, necesitamos el vector de desplazamiento. La masa se mueve a lo largo de la pendiente, y por ende la magnitud del desplazamiento es la hipotenusa del triángulo:

$$\left|\Delta\vec{r}\right| = H$$

Sabemos que el seno es el cateto opuesto sobre la hipotenusa, y sabemos que el cateto opuesto mide un metro. Por ende,

$$\sin\theta = \frac{1\text{m}}{H} \iff \frac{1}{2} = \frac{1}{H}\text{m} \iff H = 2\text{m}$$

Habiendo determinado la magnitud del desplazamiento, observamos que las dos fuerzas en acción son la gravedad y el rozamiento. Por ende,

$$\begin{aligned}
W &= W_G + W_R \\
&= \overrightarrow{G} \cdot \Delta\overrightarrow{r} + \overrightarrow{R} \cdot \Delta\overrightarrow{r} \\
&= \left|\overrightarrow{G}\right| \left|\Delta\overrightarrow{r}\right| \cos 60^\circ + \left|\overrightarrow{R}\right| \left|\Delta\overrightarrow{r}\right| \cos 180^\circ \\
&= mg \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} - \mu \left|\overrightarrow{N}\right| \cdot 2
\end{aligned}$$

La fuerza normal $\overrightarrow{N}$ contrarresta la componente perpendicular a la superficie de la gravedad. El vector gravedad y el vector unitario perpendicular al plano forman un ángulo de 30 grados, y por ende $\left|\overrightarrow{N}\right| = mg \cos 30^\circ = mg \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$. Continuando:

$$\begin{aligned}
W &= mg \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} - \mu \left|\overrightarrow{N}\right| \cdot 2 \\
&= mg - \mu \cdot mg \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \cdot 2 \\
&= mg - \mu \cdot mg\sqrt{3} \\
&= mg \left(1 - \mu\sqrt{3}\right)
\end{aligned}$$

> **Nota.** De ahora en adelante usaremos de memoria que el trabajo de la gravedad es $W = mgh$ con h la altura. Pero está bueno ver la derivación.

Como $W = \Delta K$ y $\Delta K = K_{\text{final}} - K_{\text{inicial}} = K_{\text{final}}$,

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} m v_f^2 = mg(1 - \mu\sqrt{3}) \\
\iff \quad & v_f^2 = 2g \left(1 - \mu\sqrt{3}\right) \\
\iff \quad & v_f = \sqrt{2 \cdot 9{,}8 \left(1 - 0{,}3 \cdot \sqrt{3}\right)} \text{ m/s} \\
\iff \quad & v_f = 3{,}06847539529 \text{ m/s}
\end{aligned}$$

Como era esperado, la velocidad se redujo en relación al caso sin rozamiento.

(c) No habrá ninguna diferencia porque ni siquiera cambia el planteamiento: se iguala la energía inicial (puramente potencial) con la final (puramente cinética), obteniendo lo mismo.

(d) La energía final es estrictamente cinética y dada por

$$\frac{1}{2}mv_f^2 = \frac{1}{2} \cdot 3{,}068^2 \text{ J} \approx 4{,}71\text{J}$$

La energía inicial es estrictamente potencial:

$$mg\Delta y = 1 \cdot 9{,}8 \text{ J}$$

La pérdida es casi total:

$$\Delta E = 9{,}8\text{J} - 4{,}71\text{J} = 5{,}09\text{J}$$

4. Una masa de 1 kg está comprimiendo un resorte de constante $k = 2\ N/m$ sobre una superficie horizontal y sin fricción. El resorte está comprimido 0,3 m medido desde su posición de equilibrio, en un momento dado se lo libera. El cuerpo no se encuentra atado al resorte.

   (a) Explicar que sucede luego de ser liberado

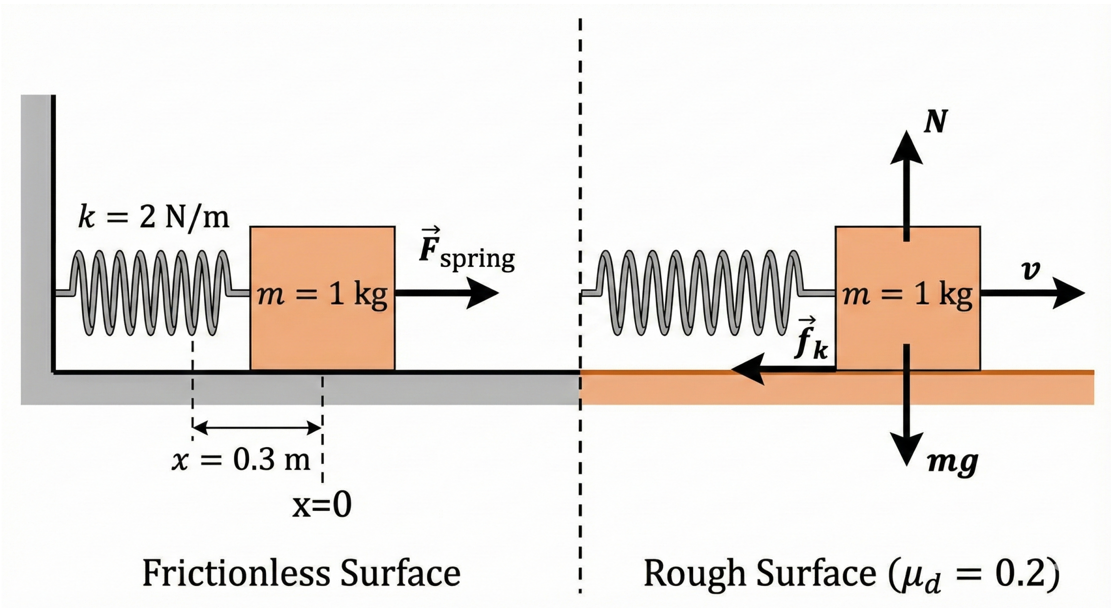
   (b) Calcule el trabajo realizado por el resorte.

   (c) Calcule la velocidad final que alcanza el cuerpo en el momento de ser liberado por el resorte.

   (d) En el momento que el cuerpo se suelta entra en una superficie con rozamiento de coeficiente dinámico $\mu_d = 0{,}2$. Explique qué sucede y calcule el trabajo realizado por la fuerza de roce cuando el cuerpo alcanza la mitad de la velocidad que traía al momento de soltarse del resorte.

   (e) Calcule la distancia recorrida hasta detenerse.

Diagrama del problema.



Solución. (a) En $t = 0$, la energía es totalmente potencial y dada por el resorte en tensión. Cuando se libera, el resorte se acelera y empieza a ejercer sobre la masa una aceleración dada por la ley de Hooke. La energía potencial se transforma en energía cinética. Cuando el resorte atraviesa x_0, el punto de equilibrio, la aceleración se vuelve negativa y la velocidad del resorte empieza a decrecer. La masa, sin embargo, sigue moviéndose a la misma velocidad, pues no percibe desaceleración alguna. Por eso mismo, justo en ese punto, la masa se empieza a separar del resorte, que queda oscilando mientras la masa se sigue yendo.

(b) En general, si asumimos que el sistema de coordenadas tiene el punto de equilibrio $x_0 = 0$, el trabajo realizado por la fuerza de un resorte que mueve un cuerpo de a a b es:

$$\begin{aligned}
W &= \int_a^b F(x)\ dx \\
&= \int_a^b -k(x - x_0)\ dx \\
&= -k \int_a^b x\ dx \\
&= -k \left[x^2/2\right]_a^b \\
&= -\frac{k}{2}\left(b^2 - a^2\right)
\end{aligned}$$

Por ende, en nuestro caso, como el resorte mueve la masa desde $x = -0{,}3$ hasta $x = 0$ (luego se despegan, como se observó en (a)),

$$\begin{aligned}
W &= -\frac{2}{2}\text{N/m}\left[0 - (-0{,}3)^2\right]\ \text{m}^2 \\
&= -\text{N/m}\,(-0{,}09)\,\text{m}^2 \\
&= 0{,}09\ \text{J}
\end{aligned}$$

(c) La energía cinética inicial es nula y la final es $K_f = \frac{1}{2}mv_f^2$ donde v_f^2 es lo que se nos pide descubrir. Como el trabajo equivale al cambio de energía cinética,

$$\begin{aligned}
& W = \frac{1}{2}mv_f^2 \\
\iff\quad & 0{,}09\text{J} = \frac{1}{2}\text{kg}\cdot v_f^2 \\
\iff\quad & v_f^2 = 2\text{kg}^{-1}\cdot 0{,}09\text{J} \\
\iff\quad & v_f = \sqrt{0{,}18\text{m}^2/\text{s}^2} \\
\iff\quad & v_f = 0{,}42426406871\text{m/s}
\end{aligned}$$

(d) Apenas el objeto se suelta, la fricción de la superficie ejerce una fuerza anti-paralela a la velocidad, causando una progresiva desaceleración. La única fuerza involucrada es la de la fricción, así que el trabajo neto será solamente el trabajo de esa fuerza. Se nos pide determinar el trabajo realizado hasta el momento en que la masa reduce su velocidad a la mitad. La energía cinética en dicho momento es $\frac{1}{8}mv_f^2 = \frac{1}{4}K_{\text{inicial}}$. Por ende el trabajo es

$$\begin{aligned} W_{roce} &= \Delta K \\ &= K_{final} - K_{inicial} \\ &= \frac{1}{4}K_{inicial} - K_{inicial} \\ &= -\frac{3}{4}K_{inicial} \\ &= -\frac{3}{4}\left(\frac{1}{2}mv_f^2\right) \\ &\approx -0{,}067416\text{J} \end{aligned}$$

(d) La aceleración es constante y dada por la fricción: $am = -\mu_d \left|\overrightarrow{N}\right| = -\mu_d mg$. Calculando:

$$a(t) = \frac{-0{,}2 \cdot 1\text{kg} \cdot 9{,}8\text{m/s}^2}{1\text{ kg}} = -1{,}96\text{m/s}^2$$

Usamos la Ecuación de Torricelli, que permite calcular la distancia recorrida por un objeto que viaja con aceleración constante sin utilizar variables de tiempo:

$$v_f^2 = v_0^2 + 2a\Delta x$$

Acá, nuestra v_f es cero, y nuestra v_0 es la velocidad al separarse del resorte (que llamábamos v_f, un poco confuso pero what you gonna do):

$$\begin{aligned} & 0 = 0{,}18(\text{m/s})^2 + 2(-1{,}96)\text{m/s}^2\Delta x \\ \iff \quad & 3{,}8\text{m/s}^2\Delta x = 0{,}18\text{m}^2/\text{s}^2 \\ \iff \quad & \Delta x = 0{,}04736842105\text{m} \\ \iff \quad & \Delta x \approx 4{,}73\text{cm} \end{aligned}$$

6. Un embalaje de masa $m = 250\ kg$ está colgado de un cable de largo $L = 10\ m$. Se lo mueve hacia un lado apartándolo de la vertical una longitud $l = 1\ m$ y se lo sostiene allí.

   (a) ¿Cuál es la fuerza necesaria para mantener el embalaje en esa posición?

   (b) ¿Se hace trabajo para sostenerlo allí?

   (c) ¿Se hizo trabajo para moverlo de lado? ¿Cuánto?

   (d) ¿La tensión del cable efectúa algún trabajo?

Solución. (a) Observemos que, si θ es el ángulo entre la vertical y la soga,

$$\sin\theta = \frac{1}{L} = \frac{1}{10} \Rightarrow \theta = \arcsin\left(\frac{1}{10}\right)$$

Asumimos que la fuerza aplicada es horizontal, i.e. $\overrightarrow{F} = -F\hat{j}$ (movimiento hacia la izquierda). Es fácil ver entonces que

$$\sum F_x = -F + T\sin\theta$$
$$\sum F_y = -mg + T\cos\theta$$

Para que la suma de las fuerzas (en ambas componentes) sea cero, igualamos las ecuaciones de arriba a acero y obtenemos un sistema con dos ecuaciones y dos incógnitas (F y T):

$$F = T\sin\theta$$
$$T\cos\theta = mg$$

Resolvemos $T = \frac{mg}{\cos\theta}$ y sustituimos:

$$F = \frac{mg}{\cos\theta} \cdot \sin\theta = mg\tan\theta$$

Como θ es conocido, solo calculamos:

$$F = 250\text{kg} \cdot 9{,}8\text{m/s}^2 \cdot \tan(\arcsin 0{,}1) = 246{,}234264739\text{N}$$

(b) No se hace trabajo porque no hay movimiento.

(c) Se hizo trabajo. Sabemos que $W = \Delta K$ y es fácil notar que ΔK es cero. Por ende $W = 0$, o bien

$$W_F + W_G + W_T = 0$$

Como la tensión es perpendicular al movimiento, no mueve nada y no hace trabajo:

$$W_F + W_G = 0 \iff W_F = -W_G$$

La gravedad es una fuerza conservativa. Por lo tanto, el trabajo que realiza es igual al cambio de su energía potencial:

$$W_G = -\Delta U = -mgy_f + mgy_0$$

En nuestro sistema de coordenadas, el origen coincide con el punto de reposo y por ende $y_0 = 0$. Queda $W_G = -mgy_f$. La altura y_f es fácil de derivar geométricamente:

$$y_f = L - L\cos\theta = L(1 - \cos\theta)$$

Por ende,

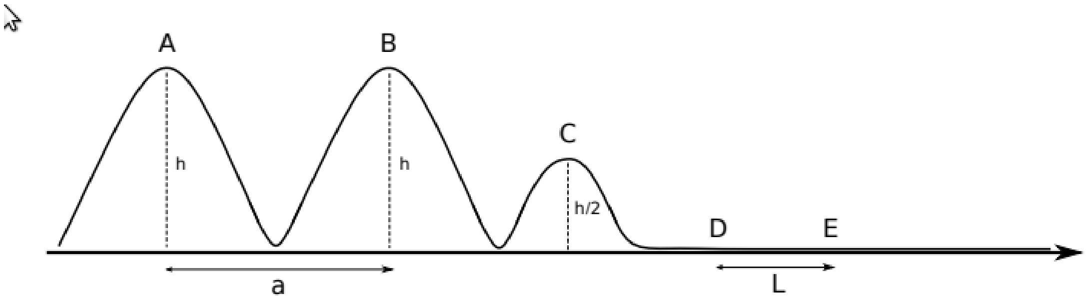
$$W_g = -250\text{kg} \cdot 9{,}8\text{m/s}^2 \cdot L(1 - \cos\theta) = -122{,}807790888\text{J}$$

Por lo tanto,

$$W_F = 122{,}807790888\text{J}$$

(d) No. Por ser perpendicular al movimiento.

7. Un carro de montaña rusa sin fricción comienza en un punto A con una velocidad v_0. Asuma que el carro puede ser considerado puntual y que siempre se mantiene en la vía.



(a) Calcule la energía total inicial del sistema.

(b) ¿Con qué velocidades llegar a a los puntos B y C?

(c) Calcule la desaceleración constante que debe aplicarse en D para que se detenga en E.

Solución. (a) La energía total del sistema en el momento inicial es dada por la energía potencial de la gravedad afectando al carro y la energía cinética del carro que se mueve con velocidad v_0:

$$E_0 = K_0 + U_0 = \frac{1}{2}mv_0^2 + mgh$$

con h la altura del carro.

(b) Las fuerzas operando en el sistema son conservativas, i.e. no hay disipación. Por conservación de la energía, se debe cumplir $E_B = E_0$. Pero $E_B = \frac{1}{2}mv_B^2 + mgh$. Por ende,

$$\frac{1}{2}mv_B^2 + mgh = \frac{1}{2}mv_0^2 + mgh \iff v_B = v_0$$

La altura en el punto C es $h/2$ de acuerdo al gráfico. Se cumple entonces, por la misma lógica,

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2}mv_C^2 + mg\frac{h}{2} = \frac{1}{2}mv_0^2 + mgh \\
\iff \quad & v_C^2 + gh = v_0^2 + 2gh \\
\iff \quad & v_C^2 = v_0^2 + 2gh - gh \\
\iff \quad & v_C = \sqrt{v_0^2 + gh}
\end{aligned}$$

(c) Si igualamos la energía en D con la energía inicial, obtenemos:

$$\frac{1}{2}mv_D^2 = \frac{1}{2}mv_0^2 + mgh \iff v_D^2 = v_0^2 + 2gh$$

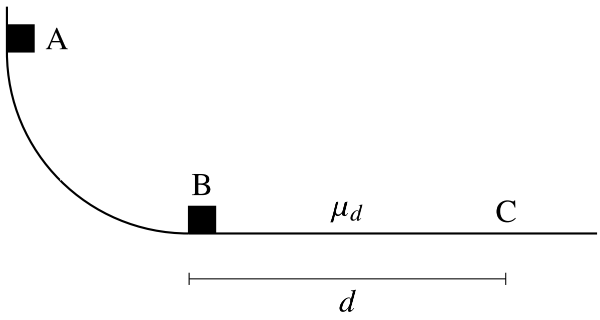
Deseamos que $v_E = 0$. Para una aceleración constante, la ecuación de Torricelli nos da:

$$v_E^2 = v_D^2 + 2a\Delta x$$

con $\Delta x = L$ la distancia entre E y D. Se obtiene entonces que si $v_E = 0$, se debe tener

$$2aL = -v_D^2 \iff a = -\frac{v_D^2}{2L} \iff a = -\frac{v_0^2 + gh}{L}$$

8. Se tiene una pista constituida en un extremo por un cuadrante de circunferencia de radio $R = 1{,}5\ m$, como se muestra en la figura. Un bloque de $m = 1\ kg$ que inicialmente estaba en reposo, se suelta en el punto A; éste desliza sobre la pista alcanzando el punto B con una velocidad $v_B = 3{,}6\ m/s$ y luego desliza sobre la superficie horizontal una distancia $d = 2{,}7\ m$ hasta llegar al punto C en el cual se detiene.



(a) ¿Cuál es el coeficiente dinámico de rozamiento sobre la superficie horizontal?

(b) ¿Cuál ha sido el trabajo realizado contra la fuerza de rozamiento mientras el cuerpo deslizó desde A hasta B sobre el arco circular?

Solución. (a) Reduzcamos el análisis sólo al intervalo entre B y C. La gravedad y la normal son perfectamente anti-paralelas y se cancelan. Por ende, la única fuerza que contribuye es la fricción, y se tiene

$$\begin{aligned} & \overrightarrow{R} = m\overrightarrow{a} \\ \Longleftrightarrow\quad & R_x\,\hat{\imath} = ma\,\hat{\imath} \\ \Longleftrightarrow\quad & R_x = ma \\ \Longleftrightarrow\quad & -\mu_d\left|\overrightarrow{N}\right| = ma \\ \Longleftrightarrow\quad & -\mu_d mg = ma \\ \Longleftrightarrow\quad & -\mu_d = \frac{a}{g} \end{aligned}$$

(R_x es negativo porque la fricción actúa hacia la izquierda). Como la aceleración está estrictamente determinada por la fuerza de la fricción, y dicha fuerza es constante, la aceleración es constante. Entonces, por Torricelli,

$$v_C^2 = v_B^2 + 2a\Delta x$$

Pero asumimos que el objeto se detiene en C, i.e. $v_C = 0$. El ejercicio nos dice que $\Delta x = d = 2{,}7$m. Entonces:

$$
\begin{aligned}
& -v_B^2 = 2ad \\
\iff \quad & -\frac{v_B^2}{2d} = a \\
\iff \quad & -\frac{(3{,}6)^2}{2 \cdot 2{,}7} = a \\
\iff \quad & a = -2{,}4 \text{ m/s}^2
\end{aligned}
$$

Sustituyendo en la ecuación de μ_d,

$$-\mu_d = -\frac{2{,}4}{9{,}8} \Rightarrow \mu_d = 0{,}24489795918$$

(b) La gravedad es conservativa. Por ende, el trabajo que realiza equivale en magnitud al cambio en su energía potencial:

$$W_G = -\Delta U_G = -\left[U_B - U_A\right] = U_A - U_B$$

De esto se sigue que

$$W_G = mgy_A - mgy_B = mgy_A = mgR = 14{,}7\text{J}$$

(No es difícil ver geométricamente que $y_A = R$.) Parte del trabajo de la gravedad se destina a vencer el rozamiento, parte a otorgar velocidad. Se nos pide cuánto se opone al rozamiento. Sabemos que

$$W_{\text{neto}} = W_{\text{conservativas}} + W_{\text{no conservativas}} = W_G + W_R$$

También sabemos que $W_{\text{neto}} = \Delta K$. Pero como el objeto estaba inicialmente en reposo, $\Delta K = K_B = \frac{1}{2} m v_B$. Por ende,

$$
\begin{aligned}
& W_G + W_R = K_B \\
\Longleftrightarrow \quad & W_R = \frac{1}{2} m v_B^2 - 14{,}7\text{J} \\
\Longleftrightarrow \quad & W_R = 6{,}48\text{J} - 14{,}7\text{J} \\
\Longleftrightarrow \quad & W_R = -8{,}22\text{J}
\end{aligned}
$$

(Como el rozamiento se opone al movimiento, el trabajo es negativo.) Entonces la fuerza de la gravedad tiene que "destinar" 8,22J de su propio trabajo a oponerse a la del rozamiento.

9. Un cuerpo de masa $m = 2\ kg$ cae desde una torre de altura $h = 100\ m$.
   (a) ¿Cuál es el impulso que recibe el cuerpo durante el primer segundo?
   (b) ¿Y durante el segundo segundo?
   (c) ¿Cuál es el impulso total recibido en el tiempo de caída libre t_{cl}?

Solución. El impulso describe la fuerza aplicada sobre un cuerpo en un intervalo de tiempo Δt:

$$\vec{J} = \int_{t_1}^{t_2} \overrightarrow{F}(t)\ dt$$

Si la fuerza es constante, se simplifica a $\vec{J} = \overrightarrow{F}\Delta t$. Cuando el tiempo es desconocido, el impulso puede expresarse en relación a la velocidad, pues satisface la siguiente relación:

$$J = m(v_f - v_i)$$

(a) La única fuerza que actúa sobre el cuerpo es la gravedad. Por ende, en el primer segundo $\Delta t = 1\text{s}$ y $J = \overrightarrow{G} \cdot \Delta t = -mg\text{s}\ \hat{j}$. Si nos enfocamos solo en la magnitud, obtenemos $J = mg \cdot 1\text{s} = 19{,}6\text{Ns}$.

(b) Durante el segundo segundo es el mismo, pues Δt y $\overrightarrow{F}$ son lo mismo.

(c) La aceleración fácilmente se calcula como $-g$. La ecuación de tiempo-posición establece que

$$\Delta y = v_{0y}t + \frac{1}{2}a_y t^2$$

Por ende, asumiendo que $v_{0y} = 0$,

$$-100\text{m} = \frac{1}{2}at^2 \iff \frac{200}{g} = t^2 \iff t = 4{,}51753951453$$

que redondeamos como $t \approx 4{,}517$. Por ende, el impulso total recibido es

$$-mg \cdot 4{,}517\text{s}\ \hat{j} = -88{,}5332\text{Ns}\ \hat{j}$$

Alternativamente, podríamos haber calculado v_f usando conservación de la energía para luego usar $J = m(v_f - v_i)$.

Solución. Facilitemos las cosas y pongamos un sistema de coordenadas tal que $\overrightarrow{v} = v\hat{\imath}$, donde v denota *componente* (no magnitud) del vector velocidad. Se sigue que una de las partes termina con velocidad $\frac{v}{3}\hat{\imath}$. La velocidad es constante y por ende la aceleración es nula. Ninguna fuerza opera sobre los cuerpos.

El momento de un cuerpo se define como $p = mv$. La ley de la conservación del momento establece que el momento inicial equivale al final. El momento inicial, antes de la explosión, es $p_i = mv$. El momento final es la suma del momento de ambos cuerpos:

$$p_f = \frac{m}{2}\frac{v}{3} + \frac{m}{2}v_?$$

con $v_?$ la velocidad que no conocemos. Entonces

$$mv = \frac{mv}{6} + \frac{mv_?}{2} \iff v = \frac{v}{6} + \frac{v_?}{2}$$

Si despejamos, llegamos rápido a $v_? = \frac{5v}{3}$. Como $v_?$ tiene el mismo signo que v, ambas partes siguen el mismo sentido. El módulo claramente es $\frac{5}{3}$ el de la velocidad original.

11. Dos bolas A y B de igual masa m chocan de frente. La velocidad de la bola A antes del choque es v. ¿Cuál debe ser la velocidad de la bola B antes del choque para que la velocidad de A después del choque sea nula? Considere que el choque es perfectamente elástico.

Solución. La respuesta rápida es: en un choque perfectamente elástico entre dos masas, las mismas se "transfieren" sus respectivas velocidades. Es decir que si A está en movimiento y se choca con B, y A queda en velocidad cero, la velocidad de B debía ser cero.

Más formalmente, "choque perfectamente elástico" significa simplemente choque que preserva la energía cinética. Antes y después del choque se cumple:

$$\begin{aligned} & K_i = K_f \\ \iff \quad & \frac{1}{2}m{v_{A_i}}^2 + \frac{1}{2}m{v_{B_i}}^2 = \frac{1}{2}m{v_{A_f}}^2 + \frac{1}{2}m{v_{B_f}}^2 \\ \iff \quad & {v_{A_i}}^2 + {v_{B_i}}^2 = {v_{A_f}}^2 + {v_{B_f}}^2 \end{aligned}$$

Si asumimos que la velocidad de A después del choque es nula, la ecuación anterior se reduce a

$$\begin{aligned} & {v_{A_i}}^2 + {v_{B_i}}^2 = {v_{B_f}}^2 \\ \iff \quad & {v_{B_i}}^2 = {v_{B_f}}^2 - {v_{A_i}}^2 \end{aligned}$$

Por conservación del momento,

$$\begin{aligned} & mv_{Ai} + mv_{Bi} = mv_{Af} + mv_{Bf} \\ \iff \quad & v_{Bf} = v_{A_i} + v_{Bi} - v_{Af} \\ \iff \quad & v_{Bf} = v_{A_i} + v_{Bi} \end{aligned}$$

Por sustitución,

$$
\begin{aligned}
v_{B_i}^2 &= (v_{Ai} + v_{Bi})^2 - v_{Ai}^2 \\
&= x^2 + 2xy + y^2 - x^2 \qquad\qquad \{x = v_{Ai}, y = v_{Bi}\} \\
\Rightarrow \quad y^2 &= 2xy + y^2 \\
\iff \quad 2xy &= 0 \\
\iff \quad xy &= 0
\end{aligned}
$$

Es decir, $v_{Ai} \cdot v_{B_i} = 0$. Si asumimos que la bola A se mueve, esto solo se cumple si $v_{B_i} = 0$.

12. Una bala de masa $m_b = 10\text{g} = 0{,}01\text{kg}$ se dispara horizontalmente sobre dos bloques que están en reposo sobre una superficie sin rozamiento. La bala pasa a través del bloque 1 $m_1 = 1,2$ kg y se incrusta en el bloque 2 $m_2 = 1,8$kg. Los bloques terminan con velocidades $v_1 = 0,63$ m/s y $v_2 = 1,4$ m/s. Despreciando el material removido en el bloque 1 por la bala, encontrar la velocidad de ésta cuando:

- a) deja el bloque 1
- b) entra al bloque 1.

Solución. Hagamos una convención notacional. Usemos v_i^j para denotar la velocidad del objeto i después del choque j, con v_i^0 la velocidad del objeto i antes del primer choque. No confundir v_i^2 con "elevar al cuadrado", significa la velocidad después de que ha ocurrido el segundo choque!

Por preservación del momento, el momento antes del primer choque equivale al momento después del primer choque

$$m_b v_b^0 + m_1 v_1^0 = m_2 v_2^0 = m_b v_b^1 + m_1 v_1^1 + m_2 v_2^1$$

Antes del primer choque, la velocidad de ambas masas es nula; después del primer choque, la velocidad de la segunda masa sigue siendo nula. Simplificando, obtenemos:

$$\begin{aligned} & m_b v_b^0 = m_b v_b^1 + m_1 v_1^1 \\ \iff \quad & v_b^0 = v_b^1 + \frac{m_1}{m_b} v_1^1 \end{aligned}$$

Esto tiene sentido físico: la velocidad inicial de la bala debería ser mayor a su velocidad después del primer choque. Esta es una ecuación con dos incógnitas, y debemos preguntarnos cómo encontrar una expresión para v_b^1. Aplicando preservación del momento para el tiempo anterior y posterior al *segundo* choque:

$$m_b v_b^1 + m_1 v_1^1 + m_2 v_2^1 = m_b v_b^2 + m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2$$

Sabemos que v_2^1 es nulo porque la segundo masa antes del segundo choque está en reposo. Además, nos dicen que tras el segundo choque, la bola se incrusta a la segunda masa, y por ende $v_b^2 = v_2^2$. Simplificando, obtenemos

$$\begin{aligned}
& m_b v_b^1 + m_1 v_1^1 = m_b v_2^2 + m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2 \\
\iff \quad & m_b v_b^1 + m_1 v_1^1 = v_2^2 \left(m_b + m_2\right) + m_1 v_1^2 \\
\iff \quad & m_b v_b^1 = v_2^2 \left(m_b + m_2\right) + m_1 v_1^2 - m_1 v_1^1 \\
\iff \quad & m_b v_b^1 = v_2^2 \left(m_b + m_2\right) + m_1 \left(v_1^2 - v_1^1\right) \\
\iff \quad & v_b^1 = \frac{v_2^2 \left(m_b + m_2\right) + m_1 (v_1^2 - v_1^1)}{m_b}
\end{aligned}$$

Ahora bien, $v_1^2 = v_1^1$, porque la velocidad de la primera masa no cambia después del segundo choque. Por ende,

$$\begin{aligned}
v_b^1 &= \frac{v_2^2 \left(m_b + m_2\right)}{m_b} \\
&= \frac{1{,}4\text{m/s}\,(0{,}01\text{kg} + 1{,}8\text{kg})}{0{,}01\text{kg}} \\
&= 253{,}4\text{m/s}
\end{aligned}$$

Ahora despejamos v_b^0 de su ecuación:

$$\begin{aligned}
v_b^0 &= v_b^1 + \frac{m_1}{m_b} v_1^1 \\
&= 253{,}4\text{m/s} + \frac{1{,}2\text{kg}}{0{,}01\text{kg}} \cdot 0{,}63\text{m/s} \\
&= 329\text{m/s}
\end{aligned}$$

Hemos así determinado la velocidad de la bala al entrar (v_{b0}) y salir (v_b^1) de la primera masa.

4. Electroestática

1. Determinar el campo eléctrico en un punto a 12cm de una partícula de carga -4×10^{-9}C. ¿Cuál sería el vector fuerza $\overrightarrow{F}$ que experimentaría un electrón si fuera ubicado en dicho punto?

Solución. (a) El campo magnético se define como la fuerza que sería percibida por una "carga unitaria" de referencia. De acuerdo a la Ley de Coulomb, esto es

$$\overrightarrow{E} = \kappa \frac{q}{r^2} \hat{r}$$

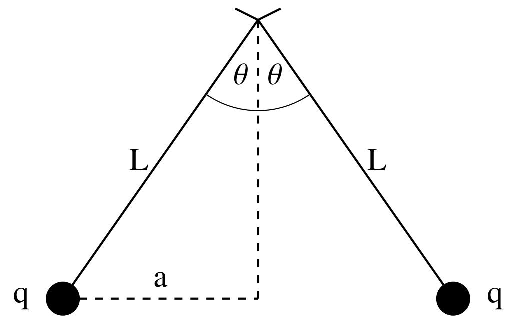
con $\hat{r}$ vector unitario que apunta desde la fuente (partícula) hacia el punto donde se genera el campo. Esto nos da:

$$\overrightarrow{E} = 9 \times 10^9 \cdot \frac{-4 \times 10^{-9}\ \mathrm{C}}{0{,}12^2 \mathrm{m}^2} \hat{r} = -2500 \mathrm{N/C}\ \hat{r}$$

(b) Un electrón tiene carga $q_e = -1{,}602 \times 10^{-19}$. La fuerza que experimenta es

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{E} \cdot q_e &= 2500 \mathrm{N/C} \cdot 1{,}620 \times 10^{-19}\ \mathrm{C}\ \hat{r} \\
&= 4005 \times 10^{-19}\ \mathrm{N}\ \hat{r} \\
&= 4{,}005 \times 10^{-16}\ \mathrm{N}\ \hat{r}
\end{aligned}$$

3. Dos pequeñas esferas idénticas cargadas, cada una con una masa de 30 g, cuelgan en equilibrio como se muestra en la figura. La longitud de cada cuerda es $l = 15\ cm$ y el ángulo es $\theta = 5°$. Encuentre la magnitud de la carga sobre cada esfera.



Solución. Sobre cada carga, actúan la gravedad, la tensión de la soga, y el campo eléctrico generado por la otra carga. Tomemos la solo la carga izquierda; a partir de ahora q se refiere solo a ella. Entonces

$$
\begin{aligned}
& \sum \overrightarrow{F} = 0 \\
\iff \quad & \overrightarrow{F} + \overrightarrow{T} + \overrightarrow{G} = 0 \\
\iff \quad & \hat{\imath}\,(T_x + E_x) + \hat{\jmath}(G_y + T_y) = 0 \\
\iff \quad & \begin{cases} T_x + E_x = 0 \\ T_y + G_y = 0 \end{cases} \\
\iff \quad & \begin{cases} T \sin\theta - \kappa \frac{q^2}{r^2} & = 0 \\ T \cos\theta - mg & = 0 \end{cases}
\end{aligned}
$$

Entonces $T = \frac{mg}{\cos\theta}$. Sustituyendo en la primera ecuación,

$$
\begin{aligned}
& \frac{mg}{\cos\theta} \sin\theta - \kappa \frac{q^2}{r^2} = 0 \\
\iff \quad & mg \tan\theta = \kappa \frac{q^2}{r^2} \\
\iff \quad & \frac{mg \tan\theta}{\kappa} \cdot r^2 = q^2 \\
\iff \quad & q^2 = 4\pi\epsilon_0 \cdot mg \tan\theta \cdot r^2 \\
\iff \quad & q = \sqrt{4\pi\epsilon_0 \cdot mg \tan\theta} \cdot r
\end{aligned}
$$

donde $r = 2a$. Pero debería ser obvio que $a = L \sin\theta$. Por ende $r = 2 \cdot 0{,}15\text{m} \cdot \sin\theta$. Obtenemos, obviando unidades:

$$
\begin{aligned}
q &= \sqrt{4\pi \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12} \cdot 0{,}03 \cdot 9{,}8 \cdot \tan(5^\circ)} \cdot 2 \cdot 0{,}15 \sin(5^\circ) \\
&= \sqrt{4\pi \cdot 8{,}85 \cdot 0{,}03 \cdot 9{,}8 \cdot \tan(5^\circ)} \cdot 0{,}3 \sin(5^\circ) \times 10^{-6} \\
&= 0{,}04422250979 \times 10^{-6} \\
&= 4{,}422250979 \times 10^{-8}\text{C}
\end{aligned}
$$

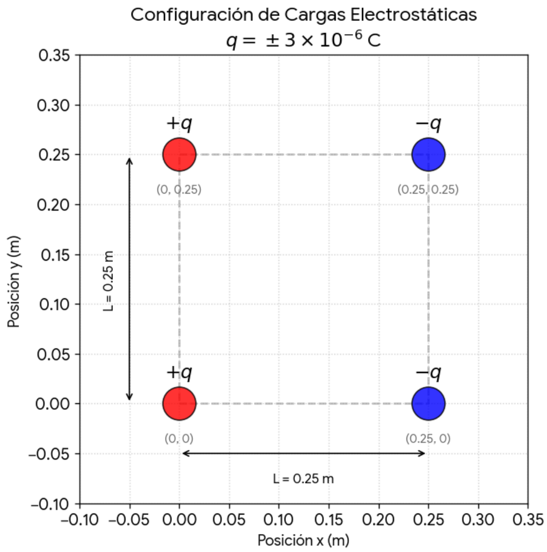
Obviamente, la carga de la otra esfera es la misma por simetría.

4. Cuatro cargas de igual magnitud $q = 3 \times 10^{-6}\ C$ están fijas en los vértices de un cuadrado de 0,25 m de lado, de manera tal que en los vértices de la derecha las cargas son negativas y las de los vértices de la izquierda son positivas.

   (a) Determinar el campo eléctrico $\vec{E}$ en el medio del cuadrado.

   (b) Explique qué le sucedería a una carga positiva, de la misma magnitud de la de los vértices, si se ubicara en el centro del cuadrado.

   (c) Explicar qué sucedería si una de las cargas negativas es apartada hacia afuera de su posición en la dirección de la diagonal del cuadrado.



(a) Debería ser claro que las cargas positivas, por ser perpendiculares y repeler una carga positiva, generan un campo con dirección $\hat{\imath}$. Mismo razonamiento para las negativas, que son perpendiculares y atractivas. Por ende, el campo eléctrico total tiene dirección $\hat{\imath}$. Esto ya nos dice que las componentes verticales de las fuerzas se cancelan a la hora de generar un campo en el centro. Solo calculamos las componentes horizontales.

La distancia al centro satisface $2r = \sqrt{\frac{1}{4}^2 + \frac{1}{4}^2} = \sqrt{\frac{2}{16}} = \sqrt{\frac{1}{8}}$. $\therefore\ r = \frac{1}{2}\sqrt{2^{-3}}$.

Todos los campos tienen igual magnitud:

$$
\begin{aligned}
\kappa\frac{q}{r^2} &= 8{,}99\times 10^9\cdot\frac{3\times 10^{-6}}{\frac{1}{4}\cdot 2^{-3}}\\
&= 8{,}99\cdot 3\cdot 4\cdot 8\cdot 10^6\\
&= 863{,}04\ 10^3\text{N/C}\\
&\approx 8{,}63\times 10^5\ \text{N/C}
\end{aligned}
$$

La proyección sobre $\hat{\imath}$ será la misma para todas las cargas (es fácil observarlo geométricamente):

$$
\begin{aligned}
E_x &= 8{,}63\times 10^5\text{N / C}\cdot\cos\frac{\pi}{4}\\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot 8{,}63\times 10^5\ \text{N/C}\\
&\approx 6{,}102\times 10^5\ \text{N/C}
\end{aligned}
$$

Por ende, el campo total será de magnitud

$$
4\cdot 6{,}102\times 10^5\ \text{N/C} = 24{,}408\times 10^5\ \text{N/C}
$$

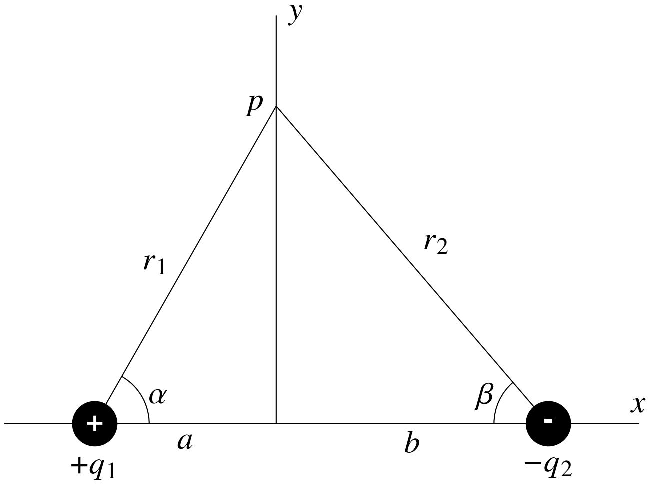
(b) La carga sería repelida horizontalmente hacia la derecha ($\hat{\imath}$) debido a la repulsión de las cargas positivas y la atracción de las negativas. Al llegar a la línea que une las dos cargas negativas, la partícula tendría su velocidad máxima. Debido a la inercia, cruzaría esta línea, pero inmediatamente sentiría una fuerza neta atractiva hacia la izquierda (restauradora) mucho más intensa que la repulsión lejana de las positivas. Por lo tanto, oscilaría alrededor del punto medio del lado derecho del cuadrado (el punto medio entre las dos cargas negativas).

(c) Estaríamos afectando la magnitud de la fuerza que dicha carga haría. Digamos que es la carga superior derecha la que se aleja. La magnitud de su efecto ya no equivaldría a la magnitud del efecto de la carga inferior derecha. Por ende, al situar una carga positiva en el centro del cuadrado, la misma se iría hacia la derecha y un poco hacia abajo, pues la carga inferior derecha la atraería con más fuerza que la superior derecha.

5. Las cargas q_1 y q_2 se ubican en el eje x a distancias a y b del origen, como se muestra en la figura.

(a) Encuentre el campo eléctrico $\vec{E}$ resultante en el punto p, que está sobre el eje y.

(b) Evalúe el campo eléctrico en el punto p en el caso especial de que $|q_1| = |q_2|$ y $a = b$.



Solución. (a) Sea $\hat{r_1}$ el vector unitario que apunta desde q_1 a P (dirección del primer campo), $\hat{r_2}$ el que apunta desde P a q_2 (dirección del segundo campo). Es claro que:

$$\hat{r_1} = \cos\alpha\ \hat{\imath} + \sin\alpha\ \hat{\jmath},$$
$$\hat{r_2} = \cos\beta\ \hat{\imath} - \sin\beta\ \hat{\jmath}$$

Los campos eléctricos individuales son:

$$\vec{E}_1 = \kappa\frac{|q_1|}{r_1^2}\ \hat{r_1}, \qquad \vec{E}_2 = \kappa\frac{|q_2|}{r_2^2}\ \hat{r_2}$$

El campo resultante es la suma vectorial directa:

$$\begin{aligned}
\vec{E}_{total} &= \vec{E}_1 + \vec{E}_2 \\
&= \kappa\frac{|q_1|}{r_1^2}\hat{r_1} + \kappa\frac{|q_2|}{r_2^2}\hat{r_2} \\
&= \kappa\left[\left(\frac{|q_1|}{r_1^2}\cos\alpha + \frac{|q_2|}{r_2^2}\cos\beta\right)\hat{\imath} + \left(\frac{|q_1|}{r_1^2}\sin\alpha - \frac{|q_2|}{r_2^2}\sin\beta\right)\hat{\jmath}\right]
\end{aligned}$$

donde el último paso es la suma componente a componente de ambos vectores.

(b) Asumamos que $a = b$ y que las cargas son de igual magnitud. Como $a = b$ se sigue que $\alpha = \beta$ y por ende que $r_1 = r_2$. Usemos $\varphi := \alpha = \beta, r := r_1 = r_2, |q| := |q_1| = |q_2|$. Obtenemos:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{E}_{\text{total}} &= \kappa \left[\frac{|q|}{r^2} \cos\varphi + \frac{|q|}{r^2} \cos\varphi \right] \hat{\imath} + \kappa \left[\frac{|q|}{r^2} \sin\varphi + \frac{|q|}{r^2} - \sin\varphi \right] \hat{\jmath} \\
&= \frac{\kappa \cdot 2\cos\varphi \cdot |q|}{r^2} \hat{\imath}
\end{aligned}$$

donde es del todo esperable físicamente que los componentes $\hat{\jmath}$ se cancelen. Podemos expresar $\cos\varphi = \text{Adj/Hip} = a/r$.

$$\vec{E}_{\text{total}} = \frac{2\kappa|q|}{r^2} \left(\frac{a}{r} \right) \hat{\imath} = \frac{2\kappa|q|a}{r^3} \hat{\imath}$$

No puede simplificarse más.

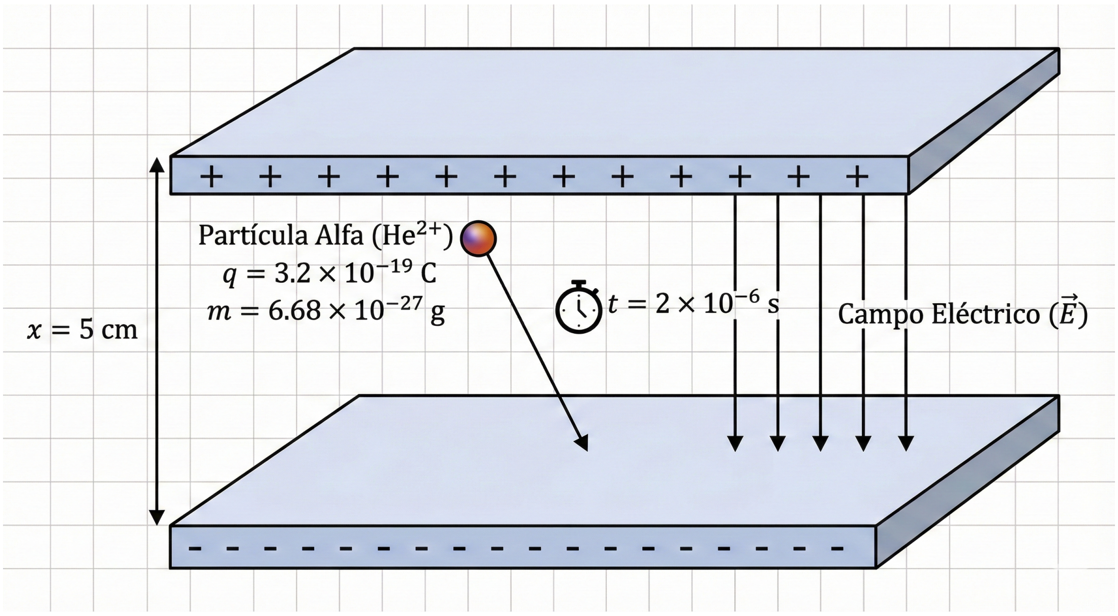
6. Dos placas paralelas están separadas por una distancia de $x = 5\ cm$. Las placas tienen la misma carga pero de signo opuesto que crean un campo eléctrico entre las placas que puede ser considerado uniforme y perpendicular a las mismas. Los núcleos de He se denominan también "partículas alfa". Una de ellas, $q = 3{,}2\times10^{-19}\ C$, $m = 6{,}68\times10^{-27}\ g$, se suelta desde la placa positiva y golpea la placa negativa $2\times10^{-6}\ s$ después.

(a) Determinar el campo eléctrico entre las placas.

(b) Calcule el trabajo realizado por el campo para trasladar la partícula alfa de una placa a otra.

(c) ¿Cuál es la diferencia de potencial entre las placas?

Diagrama.



Solución. (a) Asumimos que la única fuerza que afecta a la partícula es la del campo eléctrico, i.e. despreciamos la gravedad. Notar que de esto se sigue que la aceleración es constante.

Se nos dice que la partícula tarda 2 × 10−6 segundos en recorrer 5 centímetros en dirección estrictamente vertical. Usando la ecuación de tiempo y posición para una aceleración constante:

$$\Delta y = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

donde asumismo que $v_0 = 0$ (el instante justo antes de soltarse). Por ende,

$$\begin{aligned}
& 5\text{cm} = \frac{1}{2}a \cdot (2 \times 10^{-6}\ \text{s})^2 \\
\iff \quad & a = 2 \cdot \frac{0{,}05\text{m}}{(2 \times 10^{-6}\text{s})^2} \\
\iff \quad & a = 2 \cdot \frac{0{,}05\text{m}}{4 \cdot 10^{-12}\ \text{s}^2} \\
\iff \quad & a = 0{,}025 \cdot 10^{12}\ \text{m/s}^2 \\
\iff \quad & a = 2{,}5 \times 10^{10}\ \text{m/s}^2
\end{aligned}$$

Por segunda ley de Newton, la suma de las fuerzas es la masa por la aceleración. Pero la única fuerza involucrada es $\vec{E}q$, la fuerza experimentada por la carga en el campo. Por ende,

$$\begin{aligned}
\vec{E}q &= m\vec{a} \\
&= -6{,}68 \times 10^{-30}\ \text{kg} \cdot 2{,}5 \times 10^{10}\ \text{m/s}^2\ \hat{j} \\
&= -16{,}7 \times 10^{-20}\text{N}
\end{aligned}$$

donde $6{,}68 \times 10^{-30}$ kg $= 6{,}68 \times 10^{-27}$ g y el signo menos aparece porque el vector aceleración va en dirección $-\hat{j}$ (de arriba hacia abajo). Con esto ya podemos determinar el campo:

$$\begin{aligned}
& Eq = 16{,}7 \times 10^{-20}\ \text{N} \\
\iff \quad & E = \frac{16{,}7 \times 10^{-20}}{3{,}2 \times 10^{-19}}\ \text{N/C} \\
& \approx 5{,}219 \times 10^{-1}\ \text{N/C} \\
& = 0{,}5219\ \text{N/C}
\end{aligned}$$

(b) Ya establecimos que la fuerza ejercida por el campo sobre la partícula es $\vec{E}q$, y hemos calculado su valor numérico. Este vector es paralelo al desplazamiento $\Delta\vec{y}$. Por ende:

$$
\begin{aligned}
W &= \overrightarrow{E} q \cdot \Delta\overrightarrow{y} \\
&= \left|\overrightarrow{E} q\right| \cdot 0{,}05\text{m } \cos(0) \\
&= 16{,}7 \times 10^{-20}\ \text{N} \cdot 0{,}05\text{m} \\
&= 0{,}835 \times 10^{-20}\ \text{J} \\
&= 8{,}35 \times 10^{-21}\ \text{J}
\end{aligned}
$$

(c) Primero, recordamos la relación entre el trabajo realizado por el campo eléctrico (W_{campo}) y la energía potencial eléctrica (U). Dado que la fuerza eléctrica es conservativa, el trabajo realizado por el campo ocurre a expensas de la energía potencial del sistema:

$$\Delta U = -W_{\text{campo}}$$

Esto significa que si el campo acelera la partícula (realiza trabajo positivo), la energía potencial del sistema disminuye.

Recordemos que la diferencia de potencial elétrico es el cambio en la energía potencial por unidad de carga. Es una propiedad del campo mismo, independiente de la carga en cuestión (da lo mismo para toda q, notar que ΔU depende de la q elegida).

$$\Delta V = \frac{\Delta U}{q}$$

Sustituyendo la primera ecuación en la segunda:

$$\Delta V = \frac{-W_{\text{campo}}}{q}$$

Usando el valor del trabajo obtenido en el inciso anterior:

$$\Delta V = -\frac{8{,}35 \times 10^{-21}\text{J}}{3{,}2 \times 10^{-19}\text{C}} = -2{,}609 \times 10^{-2}\text{J/C} \approx -2{,}61 \times 10^{-2}\text{V}$$

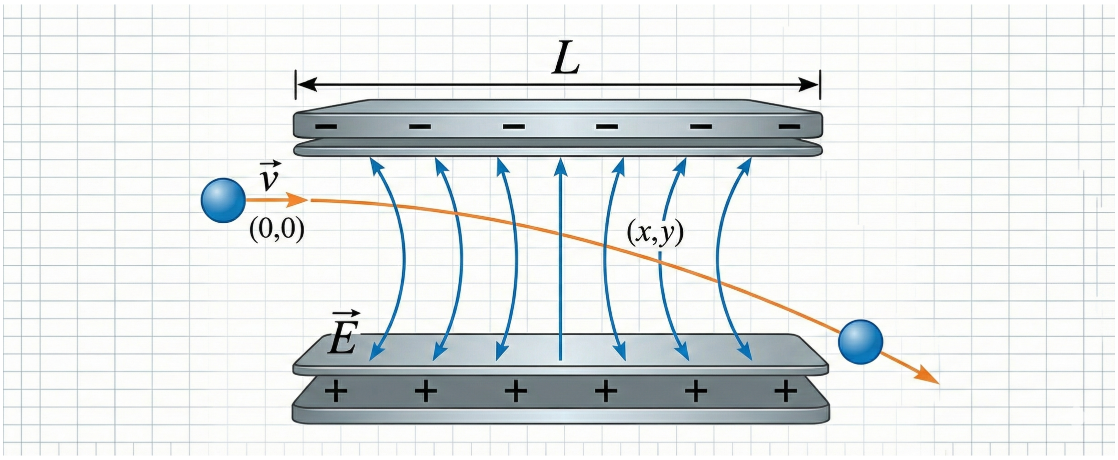
Físicamente, el signo negativo nos indica que la partícula se desplazó hacia una región de menor potencial eléctrico, tal como una roca cae hacia una menor altura.

7. Un electrón entra en una región de campo eléctrico uniforme (vea la figura) con una velocidad $v = 3 \times 10^6\ m/s$ y $E = 200\ N/C$. La longitud horizontal de los platos es $L = 0{,}1\ m$ y su separación es $h = 1{,}5\ cm$.

(a) Encuentre la aceleración del electrón mientras esta en el campo eléctrico.

(b) Asuma que la posición vertical del electrón al entrar al campo es $y = 0$, ¿logra abandonar la región de campo eléctrico? En caso de abandonarlo calcule el tiempo en el cual lo hace, caso contrario calcule la posición en la cual impacta.

Diagrama del problema.



Solución. (a) Despreciamos la fuerza de gravedad. La única fuerza que actúa sobre la carga entonces es la ocasionada por el campo, cuya magnitud es conocida. Observamos que $\overrightarrow{a} = -a\hat{j}$, es decir que la aceleración es estrictamente vertical, constante, y va "hacia" la placa con carga positiva.

$$\begin{aligned}
& qE = ma \\
\iff \quad & a = \frac{qE}{m} \\
\iff \quad & a = \frac{1{,}602 \times 10^{-19}\text{C} \cdot 200\text{N/C}}{9{,}11 \times 10^{-31}\text{kg}} \\
& a \approx 35{,}17 \times 10^{12}\ \text{m/s}^2
\end{aligned}$$

$\therefore \overrightarrow{a} = -35{,}17 \times 10^{12}\text{m/s}^2\ \hat{j}.$

(b) Ya dijimos que la aceleración es constante. Y como es estrictamente vertical, no afecta la velocidad horizontal inicial $v = 3 \times 10^6$m/s. Es decir que, visto unidimensionalmente (solo eje x), el electrón recorre la distancia horizontal $\Delta x = L = 0{,}1$m en una cantidad de tiempo dada por

$$
\begin{aligned}
& \Delta x = v_{0x} t + \frac{1}{2} a_x t^2 \\
\iff \quad & \Delta x = v_{0x} t + 0 && \{\text{No hay ac. horizontal}\} \\
\iff \quad & 0{,}1 = 3 \times 10^6 t \\
\iff \quad & t = \frac{0{,}1}{3 \times 10^6} \\
\iff \quad & t = \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{3} \cdot 10^{-6} \\
\iff \quad & 3{,}33 \times 10^{-8}\text{s}
\end{aligned}
$$

Usaremos t_x para denotar esta cantidad, pues es el tiempo que se tarda en recorrer toda la distancia horizontal de las placas. Usando la misma lógica, podemos calcularel tiempo que toma recorrer la distancia vertical entre las placas, notando que la velocidad vertical inicial es cero:

$$
\begin{aligned}
& \Delta y = v_{0y} t + \frac{1}{2} a_y t^2 \\
\iff \quad & 0{,}015 = \frac{1}{2} \cdot 35{,}17 \times 10^{12} t^2 \\
\iff \quad & t = \sqrt{\frac{2 \cdot 0{,}015}{35{,}17}} \times 10^{-6} \\
\iff \quad & t = 0{,}02920615886 \times 10^{-6} \\
& t \approx 0{,}029 \times 10^{-6} \\
& t \approx 2{,}9 \times 10^{-8} \text{ s}
\end{aligned}
$$

Denotemos a este tiempo t_y. Como $t_y < t_x$, el electrón no logra abandonar la región del campo. Calculemos la distancia recorrida hasta el momento en que impacta con la placa positiva:

$$
\begin{aligned}
& \Delta x = v_{0x} t_y \\
\iff \quad & \Delta x = 3 \times 10^6 \text{m/s} \cdot 2{,}9 \times 10^{-8} \text{ s} \\
\iff \quad & \Delta x = 8{,}7 \times 10^{-2} \text{ m}
\end{aligned}
$$

9. Considere una carga puntual $q = 1{,}5 \times 10^{-8}\, C$.

(a) ¿Cuál es el radio de la superficie equipotencial que posee $30\, V$?

(b) Las superficies equipotenciales cuyos potenciales difieren en una cantidad constante de $1\, V$, ¿están equiespaciadas en la dirección radial?.

Solución. (a) El voltaje a una distancia r la diferencia de potencial por unidad de carga:

$$V = \kappa \frac{q}{r}$$

E, κ y q son conocidos. Seteamos $V = 30$ y obtenemos (obviando unidades):

$$\begin{aligned}
30 &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1{,}5 \times 10^{-8}}{r} \\
\iff \quad r &= \frac{8{,}99 \times 10^9 \cdot 1{,}5 \times 10^{-8}}{30} \\
\iff \quad r &= \frac{13{,}48}{30} \times 10 \\
\iff \quad r &\approx 4{,}493\text{m}
\end{aligned}$$

que está en metros.

(b) No. V es inversamente proporcional al radio (por definición). Es decir, $V(r)$ no es lineal respectco de r. Cuanto más distante un radio r_1 de la carga, más lejano tendrá que ser un punto r_2 para poder generar una diferencia de 1V respecto a r_1.

10. Considere dos cargas puntuales q y $3q$ ubicadas a una distancia $d = 1\,m$. Encuentre la posición de los puntos sobre el eje que une las cargas en donde:

(a) $V = 0$,

(b) $|\vec{E}| = 0$.

Solución. El potencial generado por una carga q en un punto a una distancia r es $V = \kappa\frac{q}{r}$. Por el principio de superposición, el potencial generado por las dos cargas en un punto intermedio entre ambas es

$$V_{\text{total}} = \kappa\frac{q}{r} + \kappa\frac{3q}{1-r} = \kappa q\left(\frac{1}{r} + \frac{3}{1-r}\right)$$

Esto es cero si y solo si

$$\begin{aligned} & \frac{1}{r} + \frac{3}{1-r} = 0 \\ \iff \quad & r + \frac{1-r}{3} = 0 \\ \iff \quad & 3r + 1 - r = 0 \\ \iff \quad & 2r + 1 = 0 \\ \iff \quad & r = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

lo cual es absurdo dado que r es una distancia. Por ende, no existe ningún punto entre ambas cargas que haga que el voltaje sea cero.

(b) Las dos cargas son de igual signo. Por ende, independientemente de si son positivas o negativas, crearán fuerzas contrarias sobre cualquier carga que se ubique entre ellas. Asumimos entonces sin pérdida de generalidad que ambas cargas son positivas.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{E}(r) &= \kappa\frac{q}{r^2}\hat{\imath} - \kappa\frac{3q}{(1-r)^2}\hat{\imath} \\ &= \kappa q\left(\frac{1}{r^2} - \frac{3}{(1-r)^2}\right)\hat{\imath} \end{aligned}$$

Esto nos da la magnitud del vector:

$$
\begin{aligned}
& E = 0 \\
\iff\quad & \frac{1}{r^2} - \frac{3}{(1-r)^2} = 0 \\
\iff\quad & \frac{1}{r^2} = \frac{3}{(1-r)^2} \\
\iff\quad & (1-r)^2 = 3r^2 \\
\iff\quad & r^2 - 2r + 1 = 3r^2 \\
\iff\quad & -2r^2 - 2r + 1 = 0 \\
\iff\quad & r^2 + r - \frac{1}{2} = 0 \\
\iff\quad & r = \frac{-1 \pm \sqrt{3}}{2} \\
\iff\quad & r \approx 0{,}366\mathrm{m}
\end{aligned}
$$

ignorando la raíz negativa.

11. Utilizar la ley de Gauss, para determinar el campo eléctrico en los siguientes casos:

1. Carga puntual q.
2. Cascarón esférico delgado y conductor de radio R y carga q uniforme.
3. Esfera de radio R con carga uniforme q.
4. Línea infinita de carga con una densidad lineal de carga.
5. Lámina infinita de carga con una densidad superficial de carga.

Solución.

(b) La ley de Gauss garantiza $\Phi_E = \oint \overrightarrow{E} \cdot d\overrightarrow{A} = q_{\text{enc}}/\epsilon_0$ donde $d\overrightarrow{A}$ son diferenciales de área sobre una superficie Gaussiana. Imaginemos que encerramos el cascarón esférico de radio r_c en una circunferencia de radio r. Como el vector normal a la circunferencia de radio r es paralelo al vector de campo emitido por la carga, el producto punto de la Ley de Gauss se simplifica como sigue:

$$\begin{aligned} & E \oint dA = \frac{q_{\text{enc}}}{\epsilon_0} \\ \iff \quad & E \cdot A = \frac{q_{\text{enc}}}{\epsilon_0} \\ \iff \quad & E = \frac{q_{\text{enc}}}{\epsilon_0 A} \end{aligned}$$

donde A es el área de la circunferencia de radio r que imaginamos rodea al cascarón. Como el cascarón es conductor, la carga dentro del mismo se distribuye en la cara externa de su superficie. Entonces hay dos casos.

Si $r < r_c$, i.e. si la circunferencia imaginaria está "dentro" del cascarón, no contiene carga alguna y $q_{\text{enc}} = 0$. Si $r \geq r_c$, q_{enc} y por ende el campo resulta

$$E = \frac{q}{\epsilon_0 A} = \frac{q}{\epsilon_0 \cdot 4\pi r^2} = \kappa \frac{q}{r^2}$$

coincidiendo con la Ley de Coulomb.

(c) No nos dicen que la esfera sea conductora. Por ende, asumimos que no lo es y que la carga se distribuye de manera uniforme en su *volumen* (no, como en el caso contrario, en la cara externa de la superficie). La fórmula nos va a quedar igual:

$$E = \frac{q_{\text{enc}}}{\epsilon_0 A}$$

donde $A = A(r)$ depende del radio de la superficie Gaussiana que estemos tomando. El caso fácil es $r > R$, i.e. la superficie Gaussiana captura toda la esfera y por ende toda la carga. Aquí

$$E = \frac{q}{\epsilon_0 4\pi r^2} = \kappa \frac{q}{r^2}$$

pues $2\pi r^2$ es el área de la esfera. Pero si $r < R$, nuestra superficie imaginaria solo captura una fracción de la carga total. Si q es la carga total, y $\frac{4}{3}\pi R^3$, la fracción de volumen capturada por una esfera de radio $r < R$ concéntrica es

$$\frac{\frac{4}{3}\pi r^3}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{r^3}{R^3}$$

la proporción del radio de la esfera más pequeña respecto al radio de la más grande. Por lo tanto, la carga encerrada será $\frac{r^3}{R^3} q$, es decir

$$E = \frac{r^3}{R^3} \frac{q}{A\epsilon_0} = \frac{r^3}{R^3} \frac{q}{4\pi r^2 \epsilon_0} = \kappa \frac{rq}{R^3}$$

Acá se hace claro que el campo aumenta linealmente con r (lo cual tiene sentido físico pues la distribución de la carga es uniforme).

(d) Usemos λ = carga/longitud para denotar la cantidad de carga en una región limitad de la línea. Entonces $q = \lambda L$ es la carga por unidad de longitud. El campo alrededor de la línea tiene dirección radial, i.e. es perpendicular a la línea. Imaginamos una superficie Gaussiana cilíndrica de radio r alrededor de la línea (un envoltorio, si se quiere).

Si "partimos" el cilindro tomando sólo un tramo de longitud L, el área de dicha región estará compuesta por la cara superior, la cara inferior, y el cuerpo longitudinal del cilindro. Pero en las caras superior e inferior, el vector normal al área es perpendicular al campo, y por ende el producto cruz $\overrightarrow{E} d\overrightarrow{A}$ es cero. Es decir que en la integral $\oint \overrightarrow{E} d\overrightarrow{A}$ solo influye el área longitudinal. Por ende,

$$\begin{aligned} \Phi &= \oint \overrightarrow{E}\, d\overrightarrow{A} \\ &= E \oint dA \\ &= E \cdot (L 2\pi r) \end{aligned}$$

pues $2\pi r$ es el área de un cilindro. Por ley de Gauss, se cumple

$$E\,(L2\pi r) = \frac{q_{\text{encerrada}}}{\epsilon_0}$$

Pero ya definimos $q_{\text{encerrada}}$ como λL. Por ende, obtenemos

$$\begin{aligned} & E\,(L2\pi r) = \frac{\lambda L}{\epsilon_0} \\ \iff \quad & E = \frac{\lambda L}{\epsilon_0 \cdot 2\pi \cdot L \cdot r} \\ \iff \quad & E = \kappa \frac{\lambda}{r} \end{aligned}$$

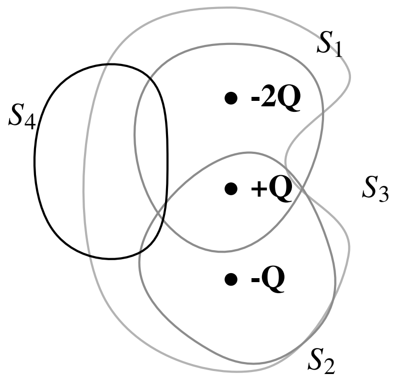
(e) Para una lámina infinita, digamos que un área cuadrada de la misma contiene una carga $\sigma = \frac{Q}{L^2}$ (carga por longitud al cuadrado). Luego la carga por pedazo de área es σL^2. Aquí, el área total es dos veces el área de una cara de la lámina. Usando razonamientos que deberían ya ser familiares,

$$\begin{aligned} \Phi &= E \oint dA \\ &= E(2 \cdot L^2) \end{aligned}$$

Por Ley de Gauss,

$$\begin{aligned} E\left(2L^2\right) &= \frac{q_{\text{enc}}}{\epsilon_0} \\ &= \frac{\sigma \cdot L^2}{\epsilon_0 \cdot 2L^2} \\ &= \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \end{aligned}$$

12. En la figura se muestran cuatro superficies cerradas, S_1 a S_4, así como las cargas $-2Q$, Q y $-Q$. Las líneas representan las intersecciones de las superficies con el plano de la página. Determine el flujo eléctrico a través de cada superficie.



Solución. Es una pavada con la Ley de Gauss.

13. Una carga $q = 170\,\mu C$ está en el centro de un cubo de lado $\ell = 80\,cm$.

(a) Encuentre el flujo eléctrico a través de toda la superficie del cubo.

(b) Encuentre el flujo eléctrico a través de cada cara del cubo.

(c) ¿Cambiaría sus respuestas anteriores si la carga no estuviera en el centro? De una explicación.

Solución. (a) El cubo contiene una única carga q. Por Ley de Gauss, el flujo eléctrico es $\frac{q}{\epsilon_0}$. No lo voy a calcular porque estoy cansado.

(b) Si la carga está en el centro, el flujo total se reparte equitativamente entre las 6 caras idénticas.

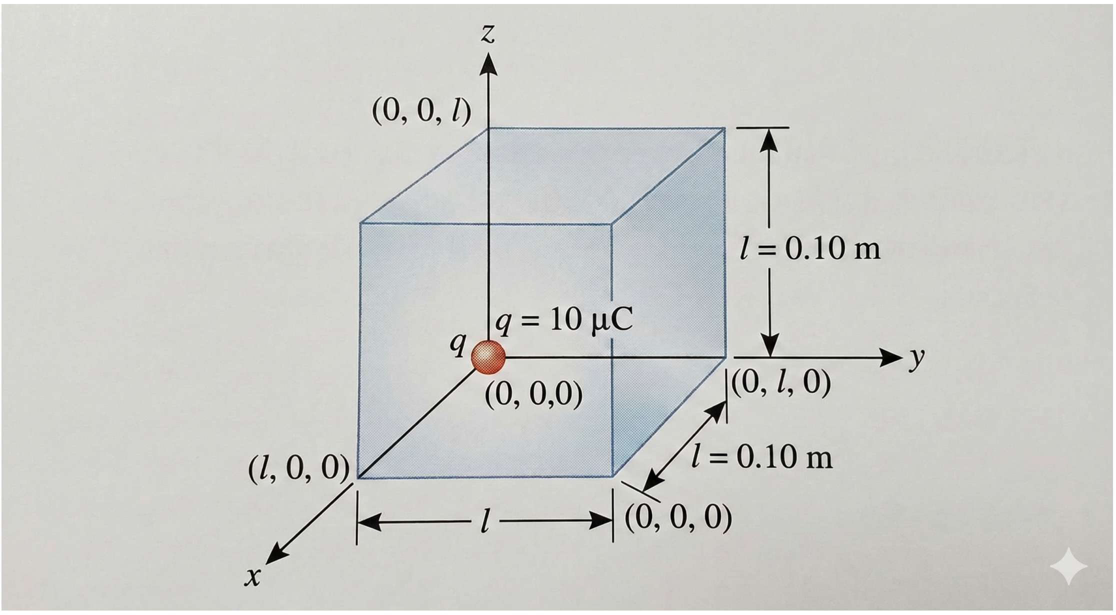
$$\Phi_{\text{cara}} = \frac{1}{6}\Phi_{\text{total}} = \frac{q}{6\epsilon_0}$$

No lo voy a calcular porque estoy cansado.

(c) El flujo total no cambiaría, ese es el punto de la ley de Gauss: no depende de la posición de la carga ni la superficie que la encierra. Pero el flujo por cara si cambiaría. Si acercamos la carga a una cara particular del cubo, dicha cara tendrá un flujo mayor y la cara contraria un flujo menor. Por ende, Φ_{cara} no sería $\frac{1}{6}\Phi_{\text{total}}$.

14. Una carga $q = 10\,\mu C$ se ubica en el origen de un sistema de coordenadas en forma coincidente con el vértice de un cubo, tres de cuyas aristas coinciden con los ejes x, y, z. El lado del cubo es $l = 0{,}10\,m$. Calcule el flujo del campo $\vec{E}$ a través de cada una de las caras del cubo. Si l fuera igual a $0{,}20\,m$, ¿qué pasaría con el valor de dicho flujo?.

Diagrama.



Solución. Vamos a calcular para una longitud ℓ general y matar dos pájaros de un tiro.

Sea Φ el flujo total que sale del cubo. Debería ser claro que las tres caras que tocan la carga no son atravesadas por el campo eléctrico, pues el mismo es paralelo a ellas. No reciban carga en absoluto. Las otras tres caras son perfectamente simétricas en relación a la carga y por ende reciben el mismo flujo. Por ende, el flujo total se divide en esas tres caras:

$$\Phi(\text{cara}) = \begin{cases} 0 & \text{la carga toca la cara} \\ \frac{\Phi}{3} & c.c. \end{cases}$$

Por ende, sólo queda determinar Φ el flujo total.

Imaginemos que agregamos cubos a nuestro cubo inicial de manera tal que formen un súper-cubo con la carga en el centro. Viendo el diagrama, sería añadir un cubo "a la izquierda" y dos cubos "atrás", como rodeando el eje z, y luego añadir un cubo debajo de cada uno de los cubos ya existentes. En total, nuestro súper-cubo está formado por ocho cubos; la carga está en el centro de ellos y por ende reciben el flujo eléctrico equitativamente. Es decir, $\Phi = \frac{1}{8}\Phi_S$ con Φ_S el flujo del super cubo.

Lo bonito de la Ley de Gauss es que el flujo eléctrico en este super cubo es una pavada y no depende ni siquiera del tamaño extendido del mismo. Es

$$\Phi_S = \frac{q}{\epsilon_0}$$

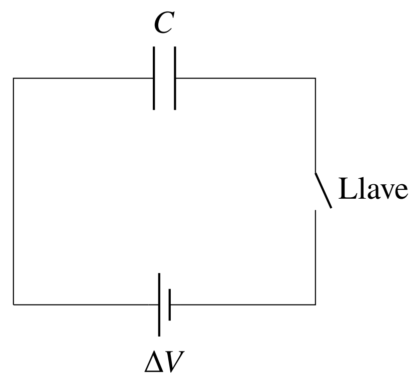
Por ende $\Phi = \frac{q}{8\epsilon_0}$. Por ende, el flujo total por cada cara del cubo original es

$$\begin{aligned}\Phi(\text{cara}) &= \begin{cases} 0 & \text{la carga toca la cara} \\ \frac{\Phi}{3} & c.c. \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{la carga toca la cara} \\ \frac{q}{24\epsilon_0} & \end{cases}\end{aligned}$$

que se puede calcular. De paso vimos que el resultado es independiente de ℓ.

5. Circuitos (P5)

1. Para el sistema mostrado en la figura que consiste de un capacitor, una batería y una llave, comente cualitativamente que sucederá al cerrar la llave. ¿Cómo se distribuyen las cargas en el capacitor, es decir, cual plato queda con carga positiva y cual con negativa? ¿En qué se transforma y dónde se almacena la energía química de la batería (despreciando la disipación en forma de calor)?



(a)

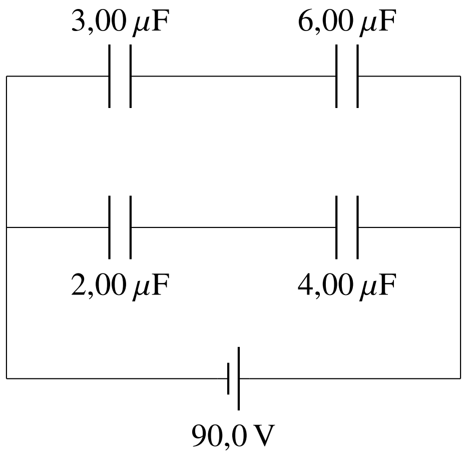
- Las cargas negativas son:
  - Atraídas desde la placa izquierda del capacitor hacia la terminal positiva de la batería
  - Repelidas por la terminal negativa de la batería hacia la placa derecha del capacitor.
- Las cargas positivas son:
  - Repelidas por la terminal positiva de la batería hacia la placa izquierda del capacitor
  - Atraídas desde la placa derecha del capacitor hacia la terminal negativa de la batería

El resultado de esto es una acumulación de carga positiva en la placa izquierda del capacitor, y una acumulación de carga negativa en la placa derecha del capacitor.

(b) La energía química de la batería se transforma en energía eléctrica potencial, almacenada en el campo eléctrico entre las dos placas del capacitor. Dicha energía obedec la fórmula

$$U = \frac{1}{2}C(\Delta V)^2$$

2. Para el sistema de capacitores (de arriba hacia abajo y de izquierda a derecha $C = 3\ \mu\text{F}, 6\ \mu\text{F}, 2\ \mu\text{F}, 4\ \mu\text{F}$) mostrados en la figura encuentre:



(a) La capacidad equivalente del sistema.

(b) El voltaje a través de cada uno de los capacitores.

(c) La carga en cada uno de los capacitores.

(d) La energía total almacenada por el grupo.

Recuerde que la energía almacenada en un capacitor se puede escribir como $U = \frac{Q^2}{2C} = \frac{CV^2}{2}$.

(a) Sean A_1, A_2 los dos capacitores en serie de arriba, B_1, B_2 los dos capacitores en serie de abajo, y A, B los capacitores que conforman cuando se los ve como una unidad. En este modelo, tenemos un circuito con dos capacitores paralelos A y B, cada uno de los cuales está formado por sub-unidades dispuestas en serie.

Si dos capacitores están en serie, la inversa de s capacitancia conjunta es la suma de sus capacitancias inversas. Por ende,

$$\frac{1}{C_A} = \frac{1}{3\mu\text{F}} + \frac{1}{6\mu\text{F}} \Rightarrow C_A = 2\mu\text{F}$$
$$\frac{1}{C_B} = \frac{1}{2\mu\text{F}} + \frac{1}{4\mu\text{F}} \Rightarrow C_B = \frac{4}{3}\mu\text{F}$$

Para dos capacitores en paralelo, su capacitancia conjunta es la suma de sus capacitancias, y por ende:

$$C := C_{\text{total}} = (2 + \frac{4}{3})\mu\text{F} \approx 3{,}33\mu\text{F}$$

(b) Para un capacitor C_x arbitrario, el voltaje entre sus placas es $V_x = Q_x/C_x$, con Q_x la magnitud de su carga y C_x su capacitancia.

Veamos que

$$Q_A = V_A C_A = 90V \cdot 2\mu\text{F} = 180\mu C$$

donde el voltaje de A es equivalente al voltaje de la batería. Como los capacitores que conforman A están en serie, ambos tienen esa misma carga, y por ende $Q_{A_1} = Q_{A_2} = Q_A$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} V_{A_1} &= Q_{A_1}/C_{A_1} = Q_A/3\mu\text{F} = 180\mu C/3\mu\text{F} = 60V \\ V_{A_2} &= Q_{A_2}/C_{A_2} = Q_A/6\mu\text{F} = 180\mu C/6\mu\text{F} = 30V \end{aligned}$$

Para la rama B es lo mismo:

$$Q_B = V_B C_B = 90V \cdot \frac{4}{3}\mu\text{F} = 120\mu C$$

Y ahora

$$\begin{aligned} V_{B_1} &= \frac{Q_{B_1}}{C_{B_1}} = \frac{Q_B}{2\mu\text{F}} = 120\mu C \cdot \frac{1}{2\mu\text{F}} = 60V \\ V_{B_2} &= \frac{Q_{B_2}}{C_{B_2}} = \frac{Q_B}{4\mu\text{F}} = 120\mu C \cdot \frac{1}{4\mu\text{F}} = 30V \end{aligned}$$

Notamos que $V_{A_1} + V_{A_2} = 90V$ y $V_{B_1} + V_{B_2} = 90V$. También notamos que como el *ratio* entre los capacitores en series es 2:1 en ambos casos A y B, el voltaje se reparte equitativamente en ambas ramas.

(c) Ya determinos en (b) que $Q_{A_i} = Q_A = 180\mu C$ y $Q_{B_i} = Q_B = 120\mu C$.

(d) La capacitancia total en el sistema, de acuerdo con (a), es $3{,}33\mu$F. El voltaje total de la fuente es 90 V. Por ende,

$$U_{\text{total}} = \frac{C_{\text{total}} V^2}{2} = \frac{10/3 \cdot 90^2 V}{2} = 13500 \mu\text{J} = 13{,}5\text{mJ}$$

4. Sean los capacitores $C_1 = 10\,\mu F$, $C_2 = 5\,\mu F$ y $C_3 = 4\,\mu F$, encontrar la capacidad equivalente en las siguientes conexiones:

(a) C_1 conectado en paralelo a C_2 y ambos en serie a C_3. Si todo está conectado a una fuente de $100\,V$, calcular la carga y la diferencia de potencial en cada condensador.

(b) C_1 conectado en serie a C_2 y ambos en paralelo a C_3. Si todo está conectado a una fuente de $100\,V$, calcular la carga y la diferencia de potencial en cada condensador.

(a) El diagrama se ve así:

```
        |---|  C1  |----|
    ----|              |---|  C3  |
        |---|  C2  |----|
```

Propiedad útil. Para capacitores con distinta capacitancia: si están en serie tienen igual carga y distinto voltaje; si están en paralelo tienen igual voltaje y distinta carga.

Propiedad	**En Serie**	**En Paralelo**
Carga (Q)	IGUAL ($Q_T = Q_1 = Q_2$)	SE SUMA ($Q_T = Q_1 + Q_2$)
Voltaje (V)	SE SUMA ($V_T = V_1 + V_2$)	IGUAL ($V_T = V_1 = V_2$)
Capacitancia Eq.	$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$ (Disminuye)	$C_{eq} = C_1 + C_2$ (Aumenta)

Cuadro 1: Propiedades de capacitores en serie y paralelo.

Capacidad equivalente. Sea M el capacitor conformado por C_1, C_2 vistos como una unidad. Como C_1, C_2 están en paralelo, $M = C_1 + C_2 = 15\mu\text{F}$. Como M y C_3 están en serie,

$$\frac{1}{C_{\text{eq}}} = \frac{1}{M} + \frac{1}{C_3} = \frac{1}{15\mu\text{F}} + \frac{1}{4\mu\text{F}}$$

de lo cual se sigue

$$C_{\text{eq}} \approx 3{,}16\mu\text{F}$$

Carga y voltaje en cada condensador. La carga total en el sistema es

$$Q_T = V_T C_T = 100V \cdot 3{,}16\mu\mathrm{F} = 316\mu\mathcal{C}$$

Como C_3 y M están en serie, comparten la misma carga, i.e. Q_T. El voltaje en C_3 obedece entonces

$$V_3 = \frac{Q_3}{C_3} = \frac{316\mu\mathcal{C}}{4\mu\mathrm{F}} = 79\mathcal{V}$$

Por estar en serie M y C_3, se cumple $V_M + V_3 = 100\mathcal{V} \Rightarrow V_M = 21\mathcal{V}$.

Por estar en paralelo C_1 y C_2, comparten voltaje de $21\mathcal{V}$ cada uno. Ahora bien, $Q_M = 316\mu\mathcal{C} = Q_1 + Q_2$. Y además,

$$\begin{aligned} Q_1 &= V_1 C_1 = 21\mathcal{V} \cdot 10\mu\mathrm{F} = 210\mathcal{C} \\ Q_2 &= V_2 C_2 = 21\mathcal{V} \cdot 5\mu\mathrm{F} = 105\mathcal{C} \end{aligned}$$

donde vemos que $Q_1 + Q_2 \approx 316\mu\mathcal{C}$, con el error de una unidad seguramente viniendo del redondeo que hicimos antes.

Con esto ya determinamos el voltaje y la carga en cada componente.

(b) El circuito es como sigue.

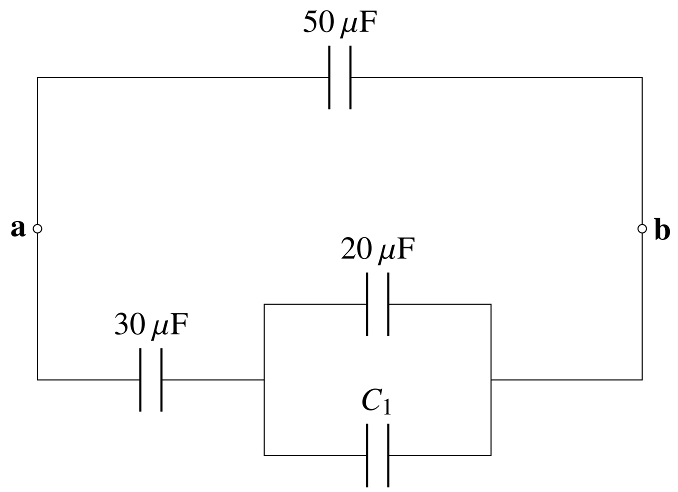
```
         |---|   C1   |----| C2   |----|
     ----|                             |----
         |---------|   C3   |---------|
```

5. Dada la siguiente expresión que determina la capacitancia equivalente,

$$70\,\mu\text{F} = 50\,\mu\text{F} + \frac{1}{\frac{1}{30\,\mu\text{F}} + \frac{1}{20\,\mu\text{F}+C_1}}$$

1. Dibuje un diagrama de circuito que muestre cuatro capacitores entre dos puntos **a** y **b** para determinar la capacitancia equivalente de la expresión anterior.
2. Encuentre el valor de C_1.
3. Suponga que una batería de 6,00 V se conecta entre **a** y **b**. Encuentre la diferencia de potencial a través de cada uno de los capacitores individuales y la carga en cada uno.

(1) El diagrama es:



(2) Sea B el bloque complejo de la parte inferior del circuito. Sabemos que $50\mu\text{F} + C_B = 70\mu\text{F}$ con lo cual $B = 20\mu\text{F}$. Luego

$$\frac{1}{20\mu\text{F}} = \frac{1}{30\mu\text{F}} + \frac{1}{20\mu\text{F} + C_1} \iff C_1 = 40\mu\text{F}$$

como es fácil comprobar.

(3) Planteemos las ecuaciones que sabemos por la organización del circuito. Sea A el capacitor de arriba (50μF), B el de 30μF, D el de 20μF y $C = C_1$ el de 40μF.

1. $V_T = V_A = V_{BCD}$ (circuitos paralelos tienen igual voltaje)
2. $Q_T = Q_A + Q_{BCD}$ (circuitos paralelos tienen cargas aditivas)

3. $Q_{BCD} = Q_B = Q_{DC}$ (circuitos en serie tienen igual carga)
4. $Q_{DC} = Q_D + Q_C$ (circuitos paralelos tienen cargas aditivas)
5. $Q_A = V_A \cdot C_A$ (propiedad conocida, $V = Q/C$.
6. $V_{BCD} = V_B + V_{DC}$ (Circuitos en serie tienen voltaje aditivo)
7. $V_{DC} = V_D = V_C$ (Circuitos paralelos tienen igual voltaje)

Usando estas ecuaciones vamos resolviendo:

- $Q_A = 6\mathcal{V} \cdot 50\mu\text{F} = 300\mu\mathcal{C}$ (por ec. 5)
- $Q_T = C_T \cdot V_T = 70\mu\text{F} \cdot 6\mathcal{V} = 420\mu\mathcal{C}$
- Por ec. 2, $Q_{BCD} = Q_T - Q_A = 120\mu\mathcal{C}$
- $V_B = Q_B/C_B = Q_{BCD}/C_B$ (ec. 3) y por ende $V_B = 120\mu\mathcal{C}/30\mu\text{F} = 4\mathcal{V}$
- Por ec. 6, $V_{BCD} = V_B + V_{DC}$ y por ende $V_{DC} = V_{BCD} - V_B$. Por ec. 1, $V_{BCD} = V_T = 6\mathcal{V}$, y ya vimos que $V_B = 4\mathcal{V}$. Por lo tanto, $V_{CD} = 2\mathcal{V}$.
- $Q_D = V_D C_D = 2\mathcal{V} \cdot 20\mu\text{F} = 40\mu\mathcal{C}$
- $Q_C = V_C \cdot C_C = 2\mathcal{V} \cdot 40\mu\text{F} = 80\mu\mathcal{C}$

En resumen:

- El capacitor A tiene carga $300\mu\mathcal{C}$y voltaje $6\mathcal{V}$.
- El capacitor B tiene carga $120\mu\mathcal{C}$ y voltaje $4\mathcal{V}$.
- El capacitor C tiene carga $80\mu\mathcal{C}$ y voltaje $2\mathcal{V}$.
- El capacitor D tiene carga $40\mu\mathcal{C}$ y voltaje $2\mathcal{V}$.

6. En un capacitor esférico lleno de aire los radios de las cubiertas interior y exterior miden 7 y 14 cm, respectivamente. (a) Calcule la capacitancia del dispositivo. (b) ¿Cuál tendrá que ser la diferencia de potencial entre las esferas para obtener una carga de 4 mC en el capacitor?

(a) Recordemos que $V = Q/C \Rightarrow C = Q/V$. El campo eléctrico a una distancia r del centro es

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r^2}$$

El voltaje es la suma del campo elétrico generado a lo largo de todo el recorrido entre la capa interior r_a a la exterior r_b:

$$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\int_{r_a}^{r_b}\frac{1}{r^2}\,dr$$

Resolviendo esta ecuación, obtenemos

$$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{r_b - r_a}{r_a r_b}\right)$$

De esto se sigue que

$$\begin{aligned} C &= \frac{Q}{\frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{r_b-r_a}{r_a r_b}\right)} \\ &= 4\pi\epsilon_0\frac{r_a r_b}{r_b - r_a} \end{aligned}$$

En nuestro caso, tenemos $r_a = 7\text{cm}, r_b = 14\text{cm}$. Por ende, la capacitancia es

$$C = 4\pi\epsilon_0\frac{14\cdot 7}{7} = 56\pi\epsilon_0$$

(b) Se nos pide hallar V tal que $Q = 4\text{mC}$. Si asumimos este valor de Q, tenemos

9 Considere el circuito con resistencias:

```
   |-------R1-------------
   |           |      |
positivo       |      |
               R3     R4
negativo       |      |
   |           |      |
   |-------R2-------------
```

donde $R_1 = 2\Omega, R_3 = 3\Omega, R_4 = 1\Omega, R_2 = 4\Omega$. Hallar corriente por cada resistencia, potencia total entregada por la batería a cada resistencia y al conjunto total.

(a) R_3, R_4 están en paralelo y por ende sus resistencias se suman: $R_{34} = R_3 + R_4 = 4\Omega$.

R_1 y R_{34} están en serie, y R_{34} y R_2 también, así que la resistencia total es

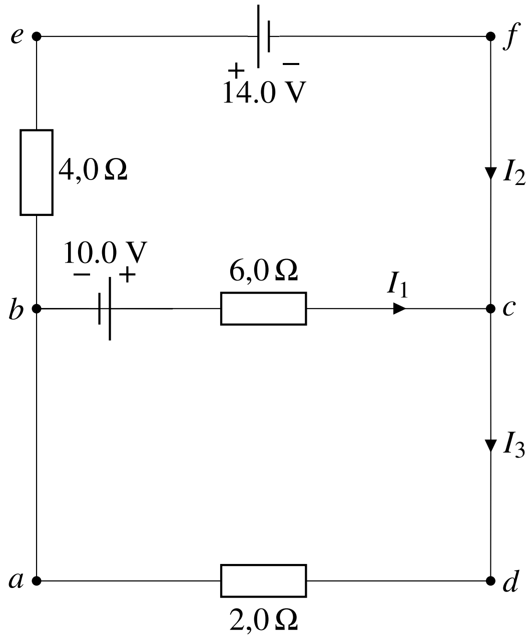
$$R_T = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_{34}} + \frac{1}{R_2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1\Omega$$

Por Ohm, $V = I \times R$ y por ende $I = \frac{V}{R} = 18\mathcal{V}/1\Omega = 18A$. Ahora, por cada resistor:

- En R_1, es $I_1 = V/R_1 = 18\mathcal{V}/2\Omega = 9A$.
- En R_2 es $I_2 = V/R_2 = \frac{9}{2}A$
- En $I_{34} = V/R_{34} = \frac{9}{2}A$. La corriente se mantiene dentro de cada rama, y por ende $I_3 = I_4 = I_{34}$.

(b) La potencia entregada es $P = I^2R$. Por ende, $P = (18A)^2 1\Omega = 324\text{W}$.

(10) Encuentre las corrientes I_1, I_2, I_3.



Kirchhoff de corrientes: $\sum I_{\text{in}} = \sum I_{\text{out}}$

Kirchhoff de voltaje. The algebraic sum of all voltages in a loop must equal zero

(a) Por Kirchhoff de corrientes, como I_3 es la corriente que sale de c y I_1, I_2 son las que entran, $I_3 = I_1 + I_2$.

(b) Considere el loop $b \to c \to f \to e \to b$. Al recorrer $b \to c$, la batería suma 10 de voltaje. Al pasar por el resistor, como nos movemos *con* la corriente I_1, el voltaje cambia $-6I_1$ (decrece). Al recorrer $c \to f \to e$ pasamos por la batería, que suma 14V. Luego pasamos por $e \to b$, y notemos que nos movemos en contra de la corriente I_2, por lo cual aumentamos el voltaje en $4I_2$.

$$\begin{aligned} &\therefore\ 10 - 6I_1 + 14 + 4I_2 = 0 \\ \iff &\quad -6I_1 + 4I_2 = -24 \\ \iff &\quad 3I_1 - 2I_2 = 12 \end{aligned}$$

Un análisis similar del loop $b \to c \to d \to a \to b$ nos da

$$4I_1 + I_2 = 5$$

Tenemos por ende que resolver el sistema

$$\begin{cases} 4x + y = 5 \\ 3x - 2y = 12 \end{cases}$$

Tomando $y = 5 - 4x$ de la primera ecuación, la segunda resulta

$$\begin{aligned} & 3x - 2(5 - 4x) = 12 \\ \iff \quad & 3x - 10 + 8x = 12 \\ \iff \quad & 11x = 22 \\ & x = 2 \end{aligned}$$

Sustituyendo en la ecuación uno, resulta $y = -3$. Por ende, $I_1 = 2A, I_2 = -3A$. Como $I_3 = I_1 + I_2$, obtenemos $I_3 = -1A$.

11. Una estufa eléctrica es fundamentalmente una resistencia que disipa potencia cuando circula corriente a través de ella. Si la estufa eléctrica disipa una potencia de 1 kW cuando se la conecta a una fuente de 50 V determine:

1. ¿Cuál es la resistencia de la estufa?
2. Si se corta la resistencia de la estufa en dos partes iguales y cuando la reparan ponen las dos partes de la resistencia conectadas en paralelo entre sí. Analice si ahora la estufa calentará más o menos cuando la resistencia estaba entera.

(1) Sea R la resistencia que representa la estufa. Sabemos que $P = V^2/R$. Por ende,

$$R = \frac{V^2}{P} = \frac{2500\text{A}^2}{1000\text{W}} = 2{,}5\Omega$$

(2) Recordemos que la resistencia de un conductor es proporcional a su longitud:

$$R = \varrho \frac{L}{A} \tag{1}$$

donde ϱ es la resistividad del material, L la longitud del resistor, y A su área. Si partimos el resistor a la mitad, obtenemos dos resistors de resistividad

$$R_1 = \varrho \frac{L}{2A}, \qquad R_2 = \varrho \frac{L}{2A}$$

donde claramente $R_1 = R_2 = R/2 = 1{,}25\Omega$ con R conocido (por el punto 1). La resistencia equivalente del sistema con las resistencias partidas es

$$\frac{1}{R'} = \frac{1}{1{,}25\Omega} + \frac{1}{1{,}25\Omega} = 1{,}6\Omega \Rightarrow R' = 0{,}625\Omega$$

La nueva potencia generada por este sistema es

$$P' = \frac{V^2}{R_{eq}} = \frac{2500\text{A}^2}{0{,}625\Omega} = 4000\text{W} = 4\text{kW}$$

Es decir, partir el resistor y conectar las dos partes en paralelo hace que produzca cuatro veces más potencia.

(12) Observaciones:

- Por **conservación de la carga**, $Q_T = \sum Q_i$ en cada instante de tiempo.
- El estado final es de equilibrio y por ende, en dicho estado, $I = 0$, $V = 0$.
- Los capacitores están en paralelo y por lo tanto tienen igual voltaje pero distinta carga.

Estado inicial:

- La carga de C_1 es Q.
- La carga de C_2 es cero.
- La carga total es Q.
- Por ser paralelos, $Q_T = Q_1 + Q_2 = 1$.

Estado final. Se ha alcanzado el equilibrio y las cargas se han distribuido entre los dos capacitores, dejando el voltaje y la corriente nulos. Las cargas son desconocidas y las llamamos q_1, q_2. Por conservación de la carga,

$$q_1 + q_2 = Q_T = Q$$

El voltaje V_f en cada capacitor es idéntico. Sabemos

$$V_f = \frac{q_1}{C_1}, \qquad V_f = \frac{q_2}{C_2}$$

Sabemos que $C_1 = C$ y $C_2 = 3C$. Luego tenemos

$$V_f = \frac{q_1}{C}, \qquad V_f = \frac{q_2}{3C}$$

Se tiene entonces

$$\frac{q_1}{C} = \frac{q_2}{3C} \iff C(3q_1 - q_2) = 0 \iff 3q_1 - q_2 = 0$$

Tenemos entonces dos ecuaciones que involucran las dos incógnitas q_1, q_2:

$$q_1 + q_2 = Q, \qquad q_2 = 3q_1$$

De esto se sigue $q_1 = \frac{Q}{4}$ y $q_2 = \frac{3}{4}Q$. Por ende, expresamos el voltaje entre las placas como:

$$V_f = \frac{Q}{4C}$$

La energía en un capacitor es $U = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C}$. Entonces nos queda

$$U_1 = \frac{1}{2}\frac{q_1^2}{C} = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{16C} = \frac{Q^2}{32C}$$

Misma lógica da $U_2 = 3Q^2/32C$. La energía final total es la suma de estas dos: $U_f = 4Q^2/32C = Q^2/8C$.

La energía disipada es la diferencia entre la energía inicial y la final. La final ya la sabemos. La inicial se sigue fácil si recordamos que, en el estado nicial, sólo el primer capacitor tenía carga (Q). Por ende, $U_i\frac{Q^2}{2C}$. Por ende,

$$U_{\text{disipada}} = \frac{Q^2}{2C} - \frac{Q^2}{8C} = \frac{3Q^2}{8C}$$

Esta es energía que "se perdióz ya no está en el sistema cuando llegamos al estado final, disipada en forma de calor.

6. Magnetismo

(1). Por efecto de un campo magnético, tres partículas siguen las trayectorias mostradas en la figura. ¿Qué puede decir sobre la carga de dichas partículas?

Solución. Sean q_1, q_2, q_3 las cargas de las partículas superior, media e inferior en el gráfico. El campo magnético **B** va hacia la pantalla. La fuerza de un campo magnético sobre una carga es

$$\vec{F} = q(\vec{v} \times \vec{B})$$

Pro ende, siempre es perpendicular a la velocidad del cuerpo cargado. Por ende, jamás afecta la velocidad del cuerpo, sino solo su dirección.

De acuerdo con la regla de la mano derecha, $\vec{v} \times \vec{B}$

(q_2) Esta partícula viaja en línea recta, i.e. no experimenta cambio de dirección. Se sigue que la fuerza $\vec{F_2} = q\left(\vec{v_1} \times \vec{B}\right)$ es nula. Pero ni la velocidad ni el campo son nulos. $\therefore$ $q_2 = 0$.

(q_1) De acuerdo con la regla de la mano derecha, el vector unitario paralelo al producto cruz $\vec{q_1} \times \vec{B}$ apunta "hacia arriba". En toda su trayectoria, la dirección de la partícula cambia en dirección paralela a dicho vector. Se sigue que la carga es positiva.

(q_2) De acuerdo con la regla de la mano derecha, el vector unitario paralelo al producto cruz $\vec{q_1} \times \vec{B}$ apunta "hacia la derecha". En toda su trayectoria, la dirección de la partícula cambia en dirección opuesta a dicho vector. Se sigue que la carga es negativa.

(2) Una partícula que posee una energía cinética de 10^{-13}J se desplaza en un campo magnético de 2T con velocidad paralela al campo. ¿Cómo será la trayectoria de la partícula?

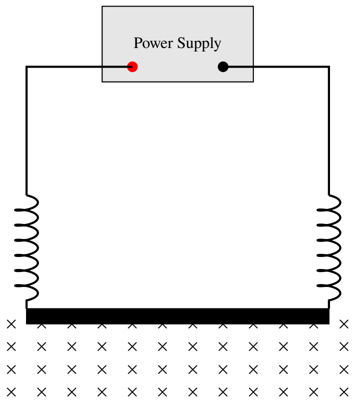
Solución. Como la velocidad es paralela al campo,

$$\vec{F} = q\left(\vec{v} \times \vec{B}\right) = qvB\sin 0\,\hat{n} = 0$$

Se sigue que el campo no afecta la dirección de la partícula. La partícula viaja en línea recta (asumiendo que no hay otras fuerzas).

3. Una barra de 100g y 50cm de longitud se encuentra inmersa en un campo magnético de 1T, perpendicular a éste (ver figura). La barra cuelga de una estructura conductora mediante dos resortes conductores (uno en cada extremo), de constante elástica k = 0,5N/m. El conjunto forma un circuito por el cual circula una corriente.

1. ¿En qué dirección debe circular la corriente de manera que los resortes se estiren?
2. ¿Cuánto debe valer la corriente para que ambos resortes se estiren 5 mm?



Datos del problema.

1. $L = 50\text{cm}, m = 100\text{g}$.
2. La barra experimenta la fuerza de la gravedad $\vec{F}_g$, la fuerza elástica de los resortes $\vec{F}_e$, y la fuerza magnética generada por el campo $\vec{F}_B$.
3. $\vec{F}_g = -mg\hat{j}$
4. $\vec{F}_e = 2\,(k\Delta y)\,\hat{j}$, con Δy la distancia entre el extremo inferior de un resorte y su posición de equilibrio.
5. $\vec{F}_B = I(\vec{L} \times \vec{B})$ donde $\vec{L}$ es el vector de magnitud L que apunta en dirección de la corriente.
6. De acuerdo con la regla de la mano derecha y el item anterior,
   a) Si la corriente corre de derecha a izquierda, $\vec{F}_B = -IBL\hat{j}$
   b) Si la corriente corre de izquierda a derecha, $\vec{F}_B = IBL\hat{j}$.

(3.1) Ya determinamos que si la corriente corre de derecha a izquierda, la fuerza electromagnética empuja la barra “hacia abajo”. Esta es claramente la dirección que estira los resortes, pues se nos dice que la barra "cuelga" de ellos. Por ende, si la corriente corre en esta dirección, los resortes se estiran.

Sin embargo, los resortes pueden permanecer estirados incluso si la corriente corre de derecha a izquierda, siempre y cuando la fuerza electromagnética generada por la corriente no supere la fuerza de gravedad.

(3.2) El problema se puede interpretar de dos formas: que los resortes se estiren *en total* 5mm, o que se estiren 5mm más de lo que se estiran si no hay corriente (no hay fuerza magnética). Resuelvo para ambos casos.

(Que se estiren en total 5mm) Asumimos de ahora en más que la corriente corre de derecha a izquierda, y que por ende $\vec{F_B} = -IBL\hat{j}$. Notemos que

$$\begin{aligned} \sum \vec{F} &= 0 \\ \vec{F_e} + \vec{F_g} + \vec{F_B} &= 0 \\ 2k\Delta y\hat{j} - mg\hat{j} - IBL\hat{j} &= 0 \end{aligned}$$

Proyectando sobre el eje y:

$$\begin{aligned} 2k\Delta y &= mg + IBL \\ IBL &= 2k\Delta y - mg \\ I &= \frac{2k\Delta y - mg}{BL} \end{aligned}$$

Reemplazando por los valores numéricos ($L = 0{,}5\text{m}, B = 1\text{T}, \Delta y = 0{,}005\text{m}, k = 0{,}5\text{N/m}$):

$$\begin{aligned} I &= \frac{2(0{,}5)(0{,}005) - (0{,}1)(9{,}8)}{(1)(0{,}5)} \\ I &= \frac{0{,}005 - 0{,}98}{0{,}5} \\ I &= \frac{-0{,}975}{0{,}5} \\ I &= -1{,}95\text{A} \end{aligned}$$

El signo negativo indica que la dirección de la corriente es contraria a la asumida. Para que los resortes se estiren solamente 5mm (venciendo el estiramiento mayor que provocaría la gravedad sola), la fuerza magnética debe apuntar hacia arriba. Por tanto, la corriente debe circular de **izquierda a derecha** con una magnitud de 1,95A.

(Que se estiren en total 5mm). Ya establecimos que

$$\sum \overrightarrow{F} = -2k\Delta y\ \hat{j} - mg\ \hat{j} - IBL\ \hat{j}$$

asumiendo que la corriente baja la barra, i.e. va de derecha a izquierda. Si no hay corriente alguna, la fuerza magnética es nula y la barra estira los resortes

$$\begin{aligned}
& -2k\Delta y\ \hat{j} - mg\hat{j} = ma\ \hat{j} \\
\iff\ & -2k\Delta y - mg = 0 \\
\iff\ & \Delta y = -\frac{mg}{2k} \\
\iff\ & \Delta y = -\frac{(0{,}1)(9{,}8)}{2(0{,}5)} \\
\iff\ & \Delta y = -0{,}98\text{m}
\end{aligned}$$

Entonces ahora la pregunta es qué valor de I garantiza $\Delta y = -0{,}98\text{m} - 5\text{mm} = -0{,}985\text{m}$ en un estado de equilibrio (aceleración nula). Es decir, deseamos:

$$\begin{aligned}
& -2k(-0{,}985)\hat{j} - mg\hat{j} - IBL\hat{j} = 0 \\
\iff\ & -2k(-0{,}985) - mg - IBL = 0 \\
\iff\ & IBL = 2k(0{,}985) - mg \\
\iff\ & I = \frac{2k(0{,}985) - mg}{BL} \\
\iff\ & I = \frac{2(0{,}5)(0{,}985) - (0{,}1)(9{,}8)}{(1)(0{,}5)} \\
\iff\ & I = \frac{0{,}985 - 0{,}98}{0{,}5} \\
\iff\ & I = \frac{0{,}005}{0{,}5} \\
\iff\ & I = 0{,}01\text{A}
\end{aligned}$$

4. Un electrón es disparado en dirección perpendicular a un campo magnético de 1T a una velocidad de 10^6 ms^{-1}. Calcule el radio de curvatura de la trayectoria del electrón en el campo, y la frecuencia angular de rotación.

Comentario teórico. Si una partícula entra perpendicularmente a un campo magnético, describe un movimiento circular uniforme y la fuerza magnética actúa como fuerza centrípeta. La magnitud de una fuerza centrípeta sobre u ncuerpo de masa m y velocidad v es mv^2/R, donde R es el radio del movimiento circular. En resumen, dadas estas condiciones,

$$F_B = m\frac{v^2}{R}$$

Solución. De lo dicho anteriormente y con $F_B = qvB\sin\theta = qvB$, obtenemos

$$\begin{aligned} R &= \frac{mv^2}{qvB} \\ &= \frac{mv}{qB} \\ &= \frac{9{,}109 \cdot 10^{-31} \cdot 10^6}{1{,}602 \cdot 10^{-19} \cdot 1} \, \frac{\text{kg m/s}^2}{\text{CT}} \\ &= \frac{9{,}109}{1{,}602} \cdot 10^{-6} \text{ m} \\ &= 5{,}68601747815 \cdot 10^{-6} \text{ m} \end{aligned}$$

La frecuencia angular es $\omega = v/R$, con lo cual queda

$$\omega = \frac{10^6 \text{m/s}^2}{5{,}68601747815 \cdot 10^{-6} \text{ m}} \approx \frac{10^{12}}{5{,}69} = 0{,}1757 \times 10^{12} \text{rad/s}$$

$\therefore\ \omega = 1{,}757 \cdot 10^{11}$rad/s.

5. Un selector de velocidad está constituido por los campos eléctrico y magnético que se describen mediante las expresiones $\vec{E} = E\hat{k}$ y $B = B\hat{j}$, siendo $B = 15{,}0mT$. Determine el valor de E tal que un electrón de 750eV trasladándose a lo largo del eje positivo x no se desvíe.

Solución. Para que la partícula no se desvíe, la fuerza eléctrica debe cancelar totalmente a la fuerza eléctrica. La magnitud de la fuerza recibida por una carga q en un campo eléctrico es qE. La magnitud de la fuerza recibida por una carga q que se mueve a una velocidad v en un campo magnético es qvB. Si igualamos ambas cantidades, obtenemos la ecuación:

$$E = vB \tag{2}$$

Queremos determinar E, pero v también es desconocida y por ende debemos derivarla.

Paso intermedio. Asumamos un electrón de energía $K = 750eV$. La energía cinética obedece $K = \frac{1}{2}mv^2$. La masa de un electrón m_e es conocida y por ende esta es una ecuación con única incógnita v.

$$\begin{aligned}
v &= \sqrt{\frac{2K}{m_e}} \\
&= \sqrt{\frac{1500\text{eV}}{9{,}109 \times 10^{-31}}} \\
&= \sqrt{\frac{1500 \cdot 1{,}602 \times 10^{-19}}{9{,}109 \times 10^{-31}}} \\
&= \sqrt{263{,}805027994}\sqrt{10^{12}} \\
&= 16{,}2420758524 \times 10^6
\end{aligned}$$

Solución final. Con el valor de v podemos resolver la ecuación (1):

$$\begin{aligned}
E &\approx \left(16{,}24 \times 10^6 \text{m/s}\right)(15\text{mT}) \\
&= 16{,}24 \cdot 15 \times 10^6 \cdot 10^{-3} \ \ \text{V/m} \\
&= 243{,}6 \times 10^3 \ \ \text{V/m} \\
&= 243600 \ \ \text{V/m}
\end{aligned}$$

Nota. La unidad V/m se sigue de que

$$m/s \cdot T = m/s \cdot V\ s\ 1/m^2 = V/m$$

Pero V/m = (J/C)/m = N/C es otra forma usual de expresar la magnitud de un campo eléctrico.

6. Se mantiene una corriente de 17 mA en solo una espira circular de 2 m de circunferencia. Un campo magnético de 0,800T se dirige en paralelo al plano de la espira.

- Calcule el momento magnético de la espira.
- ¿Cuál es la magnitud del momento de torsión ejercida por el campo magnético sobre la espira?

Notas teóricas. Recordemos que la corriente I que viaja a través de un conductor circular genera un campo magnético que pasa a través del mismo (Figura 2). La corriente se comporta entonces como un dipolo magnético (básicamente un imán). La fuerza del dipolo (del campo electromagnético) depende de la corriente I, de la cantidad de vueltas N que da la corriente, y el área A formada por el conductor. A esta fuerza le llamamos el *momento* (m) del dipolo magnético:

$$\text{Momento magnético} := \mu := NIA$$

con $[m] = \text{Am}^2$. Pero la fuerza magnética no tiene solo una magnitud, sino una dirección. Se encuentra con una regla simple de la mano derecha. Si $\hat{n}$ es el vector normal obtenido con la relga de la mano derecha, se tiene entonces

$$\vec{\mu} = NIA\,\hat{n}$$

Notar que $\vec{\mu} \parallel \vec{n}$ y por ende es perpendicular al plano formado por la espira.

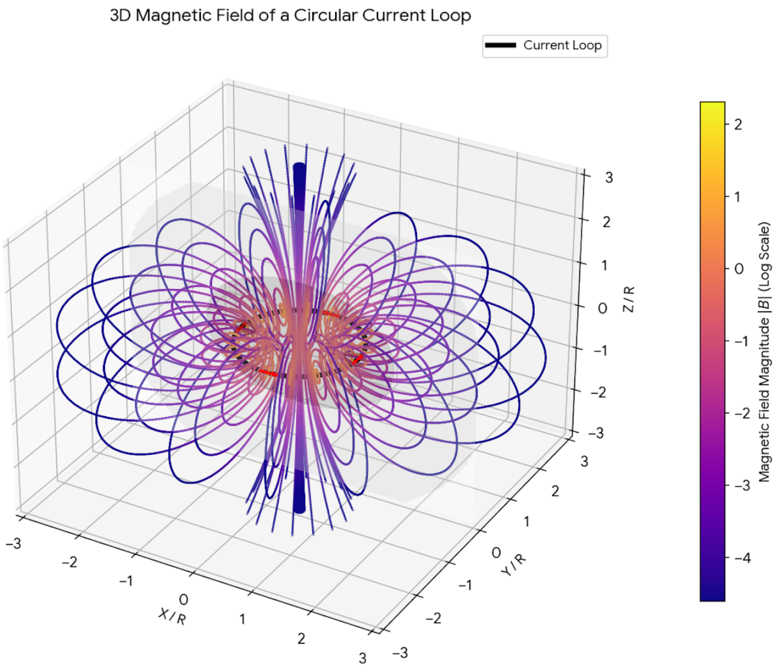


Figura 2: Representación de la espira circular flotando y el campo electromagnético a través de ella.

Cuando una espira com momento $\vec{\mu}$ se sitúa en un campo magnético externo $\vec{B}$, experimenta una fuerza de torque $\vec{\tau}$. Esta fuerza hace rotar la espira de manera tal que su momento magnético se alinee con el campo $\vec{B}$. In general,

$$\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B}$$

When a current loop with a magnetic moment $1\vec{\mu}$ (often denoted as $2\vec{u}$) is placed in an external magnetic field $3\vec{B}$, it experiences a torque 4τ.5 This torque tends to rotate the loop so that its magnetic moment aligns with the external magnetic field (Figure 3)

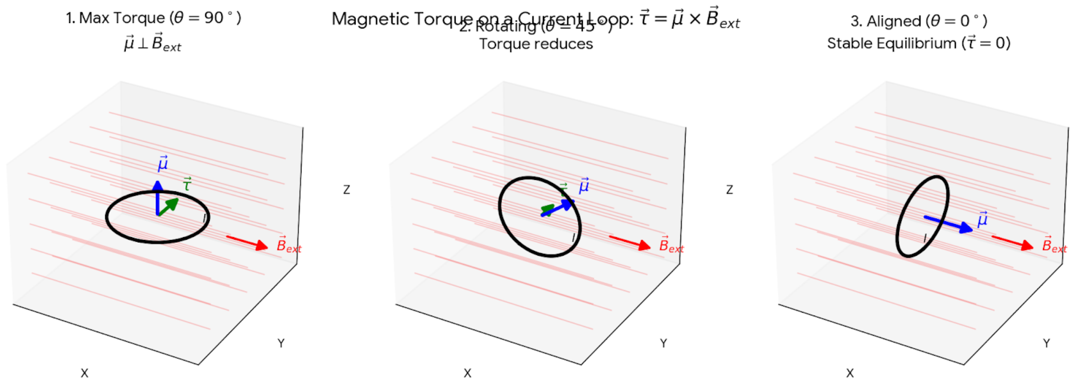


Figura 3: Representación de cómo la espira de la Figura 1 rotaría (mostrando tres instantes de tiempo) si la situamos en un campo $\vec{B}$ externo y perpendicular a $\vec{\mu}$. El momento de máximo torque es el instante cero, cuando $\vec{\mu}$ y $\vec{B}$ son totalmente perpendiculares. El torque va decreciendo a medida que la espira se alinea con el campo. Finalmente se alinean y la espira alcanza un estado de equilibrio (la fuerza de torque es cero).

Solución. (a) Ya sabemos que el momento magnético de la espira es $\vec{\mu} = INA\,\hat{n}$ con $\hat{n}$ un vector perpendicular al plano de la espira y determinado por la regla de la mano derecha. Nos dicen que la corriente se mantiene en "solo una espira", i.e. $N = 1$. También nos dan $I = 17$mA. Solo queda determinar A.

Recordemos que en una circunferencia, Area $= \pi r^2$, Circunferencia $= 2\pi r$. Nos dieron la circunferencia así que $r = 2\text{m}/2\pi = \frac{1}{\pi}\text{m}$. Luego el área es $A = \pi\text{m} \cdot \frac{1}{\pi^2}\text{m} = \frac{1}{\pi}\text{m}^2$. Por ende,

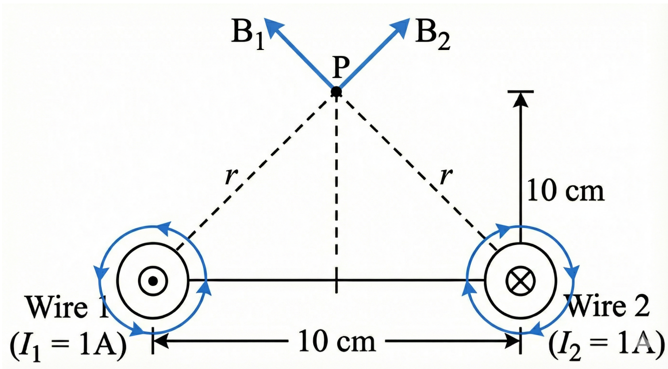
$$\vec{\mu} = \frac{17}{\pi}\ \text{mA m}^2$$

(b) Sea $\vec{B}$ el campo *paralelo al plano de la espira*. Como $\hat{\mu}$ es perpendicular al plano de la espira, se sigue $\vec{B} \perp \hat{u}$. La fuerza de torque será máxima. En particular, tendremos

$$
\begin{aligned}
\tau &= \left|\vec{\mu} \times \vec{B}\right| \\
&= \mu \cdot B \cdot \sin \frac{\pi}{2} \\
&= \frac{17}{\pi}\ (0{,}800)\ \text{mA T m}^2 \\
&= \frac{17}{\pi} \cdot \frac{4}{5}\ \text{mA T m}^2 \\
&= \frac{68}{5\pi} \times 10^{-3}\ \text{Nm} \\
&\approx 0{,}00433\ \text{Nm}
\end{aligned}
$$

7. Dos alambres conductores paralelos transportan una corriente de 1A en la misma dirección, pero con sentidos contrarios. Los alambres se encuentran separados una distancia de 10cm. Determine el campo magnético en un punto ubicado 10cm por arriba de los alambres (medido desde la línea que une a ambos), y a una distancia equidistante de ellos.

Diagrama. El siguiente diagrama refleja la situación, donde definimos el eje vertical como el eje ubicado justo entre los dos cables y el eje horizontal como el eje que conecta los dos cables. Notar que en este sistema, $P = 0\hat{\imath} + 10\text{cm}\ \hat{\jmath}$.



Solución. Un único alambre con corriente I en un punto P a una distancia r de aquél genera un campo de magnitud

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{2\pi r}\hat{n}$$

con μ_0 la permeabilidad del vacío y $\hat{n}$ unitario y perpendicular a la línea radial $\hat{r}$ (línea del cable al punto P).

Por el principio de superposición, el campo $\vec{B}$ en el punto P será la suma de los campos generados por ambos cables. Omitiendo unidades:

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 = \frac{\mu_0}{2\pi r}\hat{n}_1 + \frac{\mu_0}{2\pi r}\hat{n}_2 = \frac{\mu_0}{2\pi r}\left(\hat{n}_1 + \hat{n}_2\right)$$

Notemos que de las expresiones anteriores se sigue que ambos campos tienen igual magnitud $B := \mu/2\pi r$.

r sale fácil: en el diagrama vemos que es la hipotenusa de un triángulo con base 5cm y altura 10cm, de lo cual sale por Pitágoras que $r \approx 0{,}1118$m.

Para determinar $\hat{n_1} + \hat{n_2}$ necesitamos expresar estos vectores en nuestro sistema de coordenadas tomando su proyección. Si nos avivamos, vemos por la regla del paralelogramo que al sumar $\hat{n_1} + \hat{n_2}$, las componentes horizontales se van a anular y las componentes verticales se van a sumar.

El vector $\hat{n_1}$ es perpendicular a $\hat{r_1}$ y por lo tanto, si $\hat{r_1} = (r_{1x}, r_{1y})$, vamos a tener que $\hat{n_1} = (-r_{1y}, r_{1x})$. Es fácil ver por trigonometría que

$$\vec{r_1} = (\cos\theta, \sin\theta) = \left(\frac{5}{r}, \frac{10}{r}\right)$$

Por ende, $\hat{n_1} = (-\frac{10}{r}, \frac{5}{r})$. Ya dijimos que $\hat{n}_1 + \hat{n}_2$ duplica las componentes verticales y anula las horizontales. Por ende,

$$\hat{n_1} + \hat{n_2} = 2 \cdot \frac{5}{r}\ \hat{j}$$

Estas coordenadas están en centímetros, así que en metros queda $\hat{n_1} = 2 \cdot \frac{0{,}05}{r}\ \hat{j}$. En conclusión:

$$\begin{aligned}
\vec{B} &= 2 \times \left(\frac{\mu_0 I}{2\pi r}\right) \times \left(\frac{0{,}05 \text{ m}}{r}\right) \hat{j} \\
&= \frac{\mu_0 I (0{,}05)}{\pi r^2} \hat{j} \\
&= \frac{(4\pi \times 10^{-7}) \cdot (1 \text{ A}) \cdot (0{,}05)}{\pi \cdot (0{,}0125)} \hat{j}
\end{aligned}$$

Simplificando con calculadora,

$$\vec{B} = 1{,}6\mu\text{T}\ \hat{j}$$

8. Sean dos alambres conductores paralelos por los que circulan corrientes i_a e i_b en la misma dirección y sentido. Los alambres se encuentran separados una distancia d. Determine la posición entre ellos donde el campo magnético será nulo, según los valores de las corrientes.

(a) Ya dijimos que el campo generador por un único alambre con corriente I en un punto P a una distancia r de aquél es

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\,\hat{n}$$

con $\hat{n}$ perpendicular a $\hat{r}$, el vector del cable al punto. En nuestro caso, las corrientes fluyen en la misma dirección y sentido, que imponemos como $\hat{k}$. Debería ser claro que $\vec{B}_a$ es vertical y hacia arriba, $\vec{B}_a$ es vertical hacia abajo, y por ende que

$$\begin{aligned}
\vec{B} &= \vec{B}_a + \vec{B}_b \\
&= B_a\hat{j} - B_b\hat{j} \\
&= (B_a - B_b)\hat{j} \\
&= \left(\frac{\mu_0 i_a}{2\pi r_a} - \frac{\mu_0 i_b}{2\pi r_b}\right)\hat{j} \\
&= \frac{\mu_0}{2\pi}\left(\frac{i_a}{r_a} - \frac{i_b}{r_b}\right)\,\hat{j} \\
&= \frac{\mu_0}{2\pi}\left(\frac{i_a}{r_a} - \frac{i_b}{d - r_a}\right)\hat{j}
\end{aligned}$$

Para que el campo magnético sea nulo, se necesita entonces

$$
\begin{aligned}
& \frac{i_a}{r_a} = \frac{i_b}{d - r_a} \\
\iff \quad & \frac{r_a}{d - r_a} = \frac{i_a}{i_b} \\
\iff \quad & r_a = w(d - r_a) && \{w := i_a/i_b\} \\
\iff \quad & r_a = wd - wr_a \\
\iff \quad & r_a + wr_a = wd \\
\iff \quad & r_a(1 + w) = wd \\
\iff \quad & r_a = \frac{wd}{1 + w} \\
\iff \quad & r_a = \frac{i_a}{i_b}\left(\frac{d}{1 + \frac{i_a}{i_b}}\right) \\
\iff \quad & r_a = \frac{i_a d}{i_b + i_a}
\end{aligned}
$$

Claramente r_b es función de r_a (ya usamos esto). Así que esto basta para definir la distancia del punto respecto a los dos cables.

9. Dos alambres largos y paralelos se atraen entre sí con una fuerza por unidad de longitud igual a 320 mN/m cuando están separados una distancia vertical de 0,5 m. La corriente en el alambre superior es de 20,0 A hacia la derecha. Determine la ubicación de la línea en el plano de los dos alambres a lo largo de la cual el campo magnético total es igual a cero.

Datos y sistema de coordenadas. Imponemos un sistema de coordenadas con eje x a lo largo del cable inferior, en dirección de su corriente (derecha).

> **Teorema.** La fuerza generada entre dos conductores paralelos con corriente I_1, I_2 es
>
> $$\frac{F}{L} = \frac{\mu I_1 I_2}{2\pi d}$$
>
> donde es la distancia entre ambos conductores, L la longitud en metros, $\frac{F}{L}$ la fuerza por metro.

Nos dan el dato de que la fuerza por metro es 320mN/m. Es decir, obviando unidades,

$$\begin{aligned}
0{,}320 &= \frac{4\pi \times 10^{-7} \cdot 20 \cdot I_2}{2\pi \cdot 0{,}5} \\
0{,}320 &= 80 \cdot I_2 \cdot 10^{-7} \\
I_2 &= \frac{0{,}320}{80 \cdot 10^{-7}} \\
I_2 &= \frac{320 \times 10^{-3}}{80 \cdot 10^{-7}} \\
I_2 &= 4 \times 10^4 \\
I_2 &= 40000
\end{aligned}$$

Ahora que ya sabemos la corriente del segundo cable, sabemos que un punto cualquiera de los dos experimenta la fuerza combinada de ambos. Notemos que en el ejercicio **8** ya calculamos cuál es la distancia necesaria para que el campo entre dos corrientes paralelas se anulen. Usando ese resultado, todo punto a una distancia

$$r = \frac{I_2 0{,}5\text{m}}{I_2 + I_1}$$

entre los dos cables no experimentará ninguna fuerza. Resolviendo:

$$
\begin{aligned}
r &= \frac{40000 \cdot 0{,}5}{400020} \\
&= 0{,}49975012493
\end{aligned}
$$

10. Un solenoide de 30 cm de longitud y 1 cm de diámetro está construido con 100 vueltas de alambre de cobre de 1 mm^2 de sección. La bobina se conecta a una batería de 0,1 V, y luego de un transitorio, se establece una corriente constante en su bobinado. ¿Cuánto vale el campo magnético en el centro del solenoide después del transitorio?

Teoría. Un solenoide ideal de longitud L crea un campo uniforme en su interior y nulo en el exterior:

$$B = \mu_0 n I = \mu_0 \frac{N}{L} I$$

donde $n = \frac{N}{L}$ es la cantidad de vueltas por unidad de longitud.

Solución. Necesitamos determinar la corriente. Se nos dice que el voltaje de la batería es 0.1V, y sabemos que $I = \frac{V}{R}$ por la ley de Ohm. V es conocido, y de R sabemos que obedece:

$$R = \varrho \frac{L_{\text{alambre}}}{A}$$

con ϱ la resistividad del cobre y A el área de la sección transversal del alambre. Nos dicen que $A = 1\text{mm}^2 = (1 \times 10^{-3}\text{m})^2 = 10^{-6}\text{m}^2$.

Sabemos que el alambre da 100 vueltas con circunferencia 0,01m. La longitud de una vuelta por ende es $\pi \times 0{,}01$m. Por ende, la longitud total del alambre es:

$$L_{\text{alambre}} = 100 \times \pi \times 0{,}01 = \pi\text{m}$$

Por lo tanto, la resistividad del alambre es

$$\begin{aligned} R &= (1{,}7 \times 10^{-8}\Omega/\text{m}) \frac{\pi\text{m}}{10^{-6}\text{m}^2} \\ &= (1{,}7 \times 10^{-8}\Omega/\text{m}) 10^{6}\pi\text{m} \\ &= 1{,}7\pi \times 10^{-2}\ \Omega \\ &= 0{,}05340707511\Omega \end{aligned}$$

Sabiendo la resistividad, ya obtenemos la corriente:

$$I = \frac{0{,}1\text{V}}{1{,}7\pi \times 10^{-2}\Omega} = 1{,}8724110952\text{A}$$

Teniendo la corriente, ya podemos usar la fórmula del soneloide ideal. Obviando unidades:

$$
\begin{aligned}
B &= \mu_0 \frac{N}{L} I \\
&= (4\pi \times 10^{-7}) \frac{100}{0{,}3} \times 1,8724110952 \\
&= 7{,}4896443808 \times \frac{100\pi}{0{,}3} \times 10^{-7} \\
&= 7{,}4896443808 \times 1047{,}1975512 \times 10^{-7} \\
&= 7843{,}13725493 \times 10^{-7} \\
&= 7{,}84313725493 \times 10^{-4}
\end{aligned}
$$

11. Por fuera del solenoide anterior de ubica una bobina de 2cm de diámetro y 20 vueltas, de manera concéntrica entre ellas y con sus centros geométricos en la misma posición. ¿Cuánto vale la fuerza electromotriz inducida en esta segunda bobina al reducir la corriente en el solenoide hasta cero en un tiempo de 1s, en forma lineal?

Teoría. La *Ley de Faraday-Lenz* establece que un cambio en el flujo magnético a través de un circuito *induce* una fuerza electromotriz (FEM):

$$\mathcal{E} = -N_2 \frac{d\Phi_B}{dt}$$

donde N_2 es el número de vueltas de la bobina que recibe la inducción y $d\Phi_B/dt$ es la tasa de cambio del flujo magnético.

El flujo magnético se define como

$$\Phi_B = \int B \cdot dA$$

En un campo uniforme, cada "término" en la suma infinita es idéntico y por ende

$$\Phi_B = B \cdot A$$

La fuerza electromotriz actúa sobre las cargas eléctricas microscópicas (portadores de carga, usualmente electrones) que se encuentran libres dentro del material conductor del circuito. Debe pensarse como una "bomba"(fuerza) que empuja el agua (carga) dentro de una manguera (circuito), creando corriente.

Cuidadito. Hay varias áreas A en juego. Está el área de la sección del alambre de cobre, i.e. el grosor del alambre. Esto es lo que nos dice el enunciado **10** que vale 1mm^2. Luego está el área del "túnel" formado por el solenoide. Esta es el área del flujo magnético.

Solución. Nos dicen que la corriente decrece *linealmente* de su valor inicial a su valor final, con lo cual

$$\frac{dI}{dt} = \frac{\Delta I}{\Delta t}$$

Como I es un factor lineal de B, y todos los otros factores de B son constantes, se sigue que B se comporta como un factor lineal de Φ:

$$
\begin{aligned}
\frac{d\Phi}{dt} &= \frac{d\Phi}{dI}\frac{dI}{dt} \\
&= \frac{\Delta\Phi}{\Delta I}\frac{\Delta I}{\Delta t} \\
&= \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} \\
&= \frac{\Phi_{\text{final}} - \Phi_{\text{inicial}}}{1\text{s}}
\end{aligned}
$$

Obviamente, $\Phi_{\text{final}} = 0$ porque en ese momento la corriente es nula. Por ende, solo queda calcular Φ_{inicial}.

El campo en un solenoide ideal es uniforme. Por ende, $\Phi_{\text{inicial}} = B \cdot A$, donde A denota el área del soneloide (el "túnel"). Según el enunciado 10, el solenoide tiene 1cm de diámetro y por ende su radio es $1\text{cm}/2 = \frac{1}{200}\text{m}$. Por ende, el área es $A = (\frac{1}{200}\text{m})^2\pi = \frac{\pi}{40000}\text{m}^2 = \frac{\pi}{4} \times 10^{-4}\text{m}^2$.

$$
\begin{aligned}
\Phi_{\text{inicial}} &= B \cdot A \\
&= 7{,}84313725493 \times 10^{-4}\text{T} \times \frac{\pi}{4} \times 10^{-4}\ \text{m}^2 \\
&= 6{,}1599855953 \times 10^{-8}\ \text{Tm}^2 \\
&= 6{,}1599855953 \times 10^{-8}\ \text{Wb}
\end{aligned}
$$

Por lo tanto,

$$
\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{\Phi}{\Delta t} = -6{,}1599855953 \times 10^{-8}\ \text{Wb/s}
$$

Entonces

$$
\begin{aligned}
\text{FEM} = -N_2\frac{d\Phi}{dt} &= 20 \times 6{,}1599855953 \times 10^{-8}\text{Wb/s} \\
&= 2 \times 6{,}1599855953 \times 10^{-7}\text{Wb/s} \\
&= 12{,}3199711906 \times 10^{-7}\text{V} \\
&\approx 1{,}232 \times 10^{-6}\text{V} \\
&= 1{,}232 \times \mu\text{V}
\end{aligned}
$$

12. Una espira se desplaza a velocidad v dentro de un campo magnético de forma tal que su movimiento es perpendicular al campo.

(a) ¿Cuánto vale la fuerza electromotriz inducida?

(b) ¿Cómo cambia este resultado si el movimiento es paralelo al campo?

(a) La fuerza electromotriz es

$$\mathcal{E} = -N_2 \frac{d\Phi}{dt}$$

Pero el campo es constante y por ende $d\Phi/dt = 0$. Por ende, la fuerza electromotriz es nula.

(b) Same por el argumento anterior.

13. Una espira rectangular de 10cm de ancho se mueve saliendo de una región con un campo magnético perpendicular al plano de la espira. Si la fuerza electromotriz inducida en la espira es de 1V y el campo de 1T, ¿cuánto vale la velocidad?

Teoría. Mostraremos otra forma de ver a la fuerza electromotriz. La Ley de Faraday nos dice que la FEM depende del cambio del flujo magnético.

$$\Phi = \vec{B} \cdot \vec{A}$$

Si el campo B es perpendicular al área de una espira y es constante (uniforme), el flujo es simplemente el campo por el área efectiva que está dentro del campo:

$$\Phi = B \cdot A(t)$$

Asumamos que una espira rectangular de altura L se está moviendo con velocidad v. Sea $x(t)$ la longitud horizontal de la espira que todavía está dentro del campo magnético. El área dentro del campo es:

$$A(t) = L \cdot x(t)$$

Por lo tanto, el flujo es:

$$\Phi = B \cdot L \cdot x(t)$$

Ahora aplicamos la fórmula general (asumiendo $N_2 = 1$ vuelta):

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt}$$

Sustituimos Φ:

$$\mathcal{E} = -\frac{d}{dt}(B \cdot L \cdot x(t))$$

Como B y L son constantes, salen de la derivada:

$$\mathcal{E} = -B \cdot L \cdot \frac{dx}{dt}$$

Pero $dx/dt = v$ por definición. Como la espira está saliendo, la distancia x se está reduciendo a la velocidad del movimiento.

$$\frac{dx}{dt} = -v$$

(Es negativo porque la longitud x dentro del campo disminuye). Sustituimos esto en la ecuación anterior:

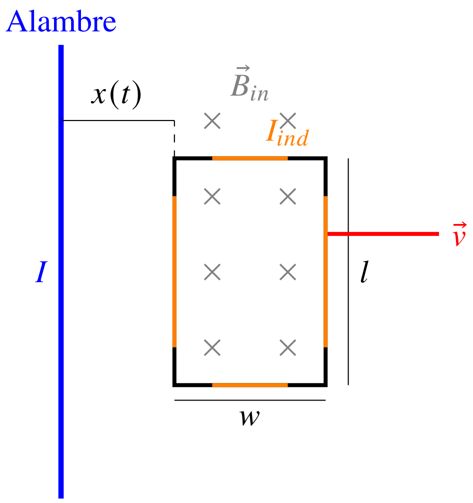
$$\mathcal{E} = -B \cdot L \cdot (-v)$$
$$\mathcal{E} = B \cdot L \cdot v$$

Solución. Nos dan la fuerza electromotriz. Sabemos que, en este caso particular, dicha fuerza es

$$\mathcal{E} = BLv$$

que son todas cantidades conocidas. Despejar v y estamos.

14. Una espira rectangular de dimensiones l y w se mueve con una velocidad constante v alejándose de un alambre largo que conduce una corriente I en el plano de la espira cuya resistencia total es R. El alambre conductor es paralelo al lado l de la espira. Deduzca una expresión para la corriente en la espira en el instante en que el lado cercano esté a una distancia r del alambre.



Estrategia. Tenemos que involucrar todas las variables y dar una ecuación para I. La ley de Ohm nos da $I = V/R$. El voltaje de una espira que se mueve en un campo es la fuerza electromotriz $\mathcal{E}$, así que $I = \mathcal{E}/R$. La idea es dar una expresión para $\mathcal{E}$.

Solución. Sea $\hat{\imath}$ la dirección de $\vec{v}$, $\hat{\jmath}$ la del cable (hacia arriba), $\hat{k}$ hacia .ªdentro".

En cada punto P a una distancia r del cable, el campo magnético generado por el cable hace una fuerza por unidad de carga:

$$\vec{B}_{\text{campo}} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\hat{k}$$

Además, sabemos que

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt}$$

donde

$$
\begin{aligned}
\Phi(r) &= \int_{\text{Área de la espira}} B\ dA \\
&= \int_{r}^{r+w} Bl\ dx \\
&= \frac{\mu_0 I \cdot l}{2\pi} \int_{r}^{r+w} \frac{1}{r(x)}\ dx \\
&= \frac{\mu_0 I \cdot l}{2\pi} \int_{r}^{r+w} \frac{1}{x}\ dx \\
&= \frac{\mu_0 I \cdot l}{2\pi} \left[\ln(r+w) - \ln(r)\right] \\
&= \frac{\mu_0 I \cdot l}{2\pi} \ln\left(\frac{r+w}{r}\right)
\end{aligned}
$$

Todas las variables están involucradas, excepto v. Pero v aparece implícita en la ley de Faraday:

$$
\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d\Phi}{dr}\frac{dr}{dt} = -\frac{d\Phi}{dr}\ v
$$

La derivada de Φ respecto de r se puede calcular, pues ya encontramos $\Phi(r)$:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{E} &= -v \cdot \frac{d}{dr}\left[\frac{\mu_0 Il}{2\pi} \ln(r+w) - \ln(r)\right] \\
&= -\frac{\mu Ilv}{2\pi}\left(\frac{1}{r+w} - \frac{1}{r}\right)
\end{aligned}
$$

Recordemos que la fuerza electromotriz es un voltaje, no una fuerza en newtons. Por Ley de Ohm, $I = V/R$. Por ende,

$$
\begin{aligned}
I &= \frac{\mathcal{E}}{R} \\
&= \frac{-\frac{\mu Ilv}{2\pi}\left(\frac{1}{r+w} - \frac{1}{r}\right)}{R}
\end{aligned}
$$

Pero qué asco de ejercicio, no me quedan ganas ni de simplificar la expresión de arriba.

15. Un conductor cilíndrico de radio R transporta una corriente I distribuída uniformemente sobre toda la sección transversal del conductor. Encuentre el campo magnético como función de la distancia r desde el eje del conductor, de puntos situados tanto dentro ($r < R$), como fuera ($r > R$) del conductor.

Teoría. La ley de Ampere establece que la integral de línea del campo magnético $\mathbf{B}$ a lo largo de una trayectoria cerrada imaginaria (llamada "bucle amperiano") es igual a la permeabilidad del vacío multiplicada por la corriente neta que atraviesa la superficie delimitada por dicha trayectoria. Matemáticamente:

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I_{\text{enc}}$$

Donde: $\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l}$ es la suma del campo magnético a lo largo del camino cerrado e I_{enc} es la corriente encerrada por el camino elegido.

Solución (Caso $r > R$). Imaginemos una circunferencia de radio $r > R$ formada alrededor de algún punto arbitrario del eje conductor. Dicha circunferencia es una trayectoria cerrada y podemos tomarla como bucle amperiano. Sabemos entonces que el campo magnético $\mathbf{B}$ en dicha circunferencia satisface

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I_{\text{enc}}$$

con I_{enc} la corriente encerrada por el camino elegido. Dicha corriente no es más que la corriente I, pues la misma se distribuye uniformemente sobre toda la sección transversal del conductor. Ahora bien,

$$\mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = |\mathbf{B}|\,|d\mathbf{l}| \cos\theta$$

Por la regla de la mano derecha, $\mathbf{B}$ “gira” alrededor del cable y por ende es paralelo en todo punto al vector $d\mathbf{l}$, con lo cual $\cos\theta = 1$. Por ende,

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \oint B\, dl$$

La fuerza del campo B depende solo de la distancia r, y por ende B es constante en la integral anterior, obteniendo

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \oint B\, dl = B \oint \; dl = B \cdot (2\pi r)$$

donde la integral da $2\pi r$ porque es la longitud (perímetro) de una circunferencia de radio r. De todo lo anterior se sigue que

$$B \cdot 2\pi r = \mu_0 I \Rightarrow B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

(Caso $r < R$). Lo único que cambia ahora es que, como nuestra circunferencia imaginaria está dentro del conductor, no capta toda la corriente distribuida en él, sino solo una fracción de la misma. Para encontrar cuánta corriente hay en un punto particular, tomamos un una *slice* del conductor (como si lo cortáramos como un salamín!) y dividimos la cantidad total de corriente por el área total del *slice*:

$$J = \frac{\text{Corriente en el slice}}{\text{Área del slice}} = \frac{I}{\pi R^2}$$

J es la densidad de corriente, es cuánta corriente hay en un punto particular. Ahora bien, si en un punto particular hay una corriente J, en una circunferencia de radio πr^2 hay $J \cdot \pi r^2$ de corriente:

$$I_{\text{enc}} = J \cdot \pi r^2 = \left(\frac{I}{\pi R^2}\right) \pi r^2 = I \left(\frac{r}{R}\right)^2$$

La integral de campo sigue valiendo $B \cdot 2\pi r$, con lo cual la Ley de Ampere ahora nos da

$$B \cdot 2\pi r = \mu_0 I \left(\frac{r}{R}\right)^2 \Rightarrow B(r) = \frac{\mu_0 I r^2}{2\pi r \cdot R^2} = \frac{\mu_0 I r}{2\pi R^2}$$

7. Parcial 1 - 2025

Problema 1. En un partido de fútbol femenino, que se juega sobre piso de arena, una jugadora frente al arco, ve que éste está desguarnecido y patea la pelota, con una velocidad inicial de módulo igual a 24 m/s formando un ángulo de 30° con la horizontal, intentando convertir el gol. Debido a que existe un fuerte viento la pelota experimenta, además de la aceleración de la gravedad, una aceleración horizontal de 2 m/s^2 en sentido opuesto a su dirección de movimiento. Sabiendo que el arco, de 2,44 m de altura, está ubicado a 45 m de donde parte la pelota, que en la arena, y al impactar con el piso, la pelota no se desplaza horizontalmente, que la aceleración de la gravedad es igual a 10 m/s^2:

(a) Dibuje un esquema de la situación y el sistema de coordenadas elegido.

(b) Escriba los vectores aceleración, velocidad y posición de la pelota mientras la pelota está en vuelo.

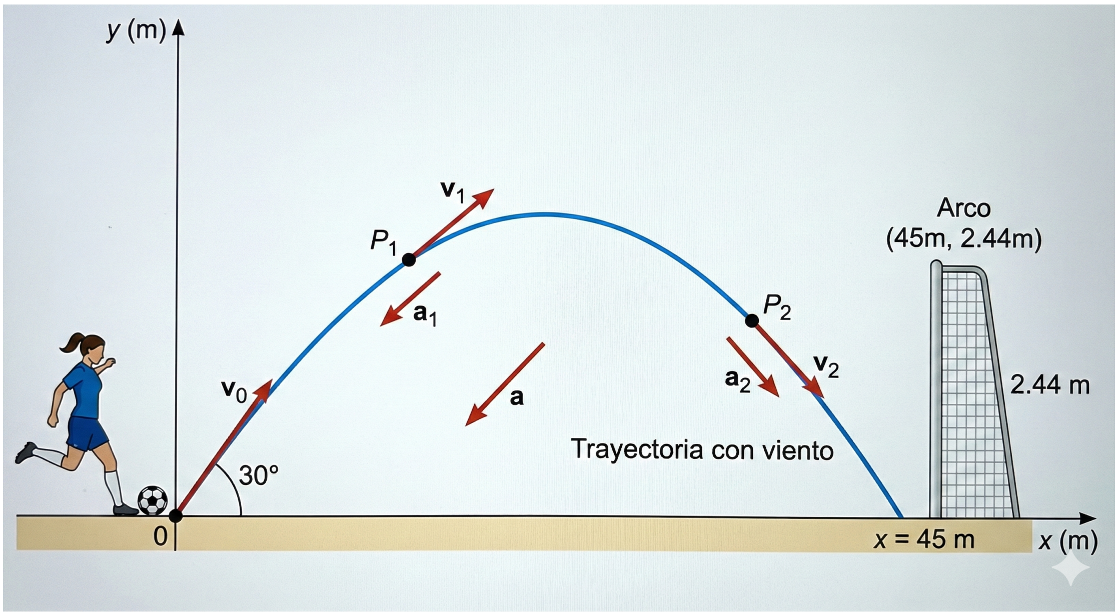
(c) Calcule la altura máxima que alcanza la pelota.

(d) Determine si la jugadora logra convertir el gol. Realice todos los cálculos necesarios para justificar su respuesta.

(e) Si no hubiese existido la aceleración horizontal provocada por el viento, ¿la jugadora habría convertido el gol? Realice todos los cálculos necesarios para justificar su respuesta.

(f) En el esquema del ítem (a), grafique cualitativamente la trayectoria en el caso de que existe aceleración horizontal y dibuje los vectores velocidad y aceleración en dos puntos cualquiera de la misma.

Solución. (a, f) Elegimos un sistema de coordenadas con el origen coincidiendo con la posición inicial de la pelota.



(b) Sabemos:

1. $a_y = -g\text{m/s}^2$
2. $a_x = -2\text{m/s}^2$
3. $v_z(t) = v_{0z} + a_z t,\ z \in \{x, y\}$ (movimiento rectilíneo en cada dirección).
4. $z(t) = z_0 + v_{0z}t + \frac{1}{2}a_z t^2$ (movimiento rectilíneo en cada dirección).
5. $v_{0x} = v_0 \cos\theta,\ v_{0y} = v_0 \sin\theta$.
6. $x_0 = 0,\ y_0 = 0$.

Por lo tanto,

$$
\begin{aligned}
\vec{a}(t) &= -2\ \text{m/s}^2\ \hat{\imath} - g\ \text{m/s}^2\ \hat{\jmath} \\
\vec{v}(t) &= [v_0 \cos\theta - 2t]\ \hat{\imath} + [v_0 \sin\theta - gt]\ \hat{\jmath} \\
\vec{r}(t) &= \left[v_0 \cos\theta \cdot t - t^2\right]\ \hat{\imath} + \left[v_0 \sin\theta \cdot t - \frac{g}{2}\, t^2\right]\ \hat{\jmath}
\end{aligned}
$$

(c) La altura máxima en el movimiento parabólico es dada por

$$H = \frac{v_0^2 \sin^2 \theta}{2g}$$

Resolviendo, obviando unidades:

$$H = \frac{24^2 \cdot \sin^2(30°)}{2 \cdot 10} = 7{,}2\text{m}$$

(d) Para determinar si hace el gol, debemos determinar la altura en el momento en que su distancia horizontal es 45m. El tiempo t_0 en que la pelota recorre 45 metros horizontales satisface

$$r_x(t_0) = 45\text{m}$$

Es decir, obviando unidades,

$$\begin{aligned}
& v_0 \cos\theta \cdot t_0 - t_0^2 = 45 \\
\iff \quad & -t_0^2 + 24 \cdot \cos(30°) \cdot t_0 - 45 = 0 \\
\iff \quad & -t_0^2 + 20{,}78 t_0 - 45 = 0 \\
\iff \quad & t_0 = \frac{-20{,}73 \pm \sqrt{20{,}78^2 - 4 \cdot 45}}{-2} \\
\iff \quad & t_0 \in \{2{,}4555\text{s}, 18{,}3\text{s}\}
\end{aligned}$$

donde nos quedamos con la menor solución (la segunda es el tiempo que tardaría la pelota en retornar a la distancia de 45m tras haberla recorrida ya, por acción del viento.)

Ahora observamos que

$$\begin{aligned}
r_y(t_0) &= r_y(2{,}4555) \\
&= 12 \cdot 2{,}4555 - \frac{10}{2} \cdot 2{,}4555^2 \\
&= -0{,}681 \text{ m}
\end{aligned}$$

Es decir que la pelota ya ha tocado el suelo ($r_y = 0$) en algún momento $t < t_0$. La pelota no llega al arco.

(e) Si no existiera aceleración horizontal, $r_x(t)$ sería $r_x(t) = v_0 \cos\theta \cdot t$, pues la aceleración igual a cero anularía el factor cuadrático. En este caso,

$$
\begin{aligned}
& r_x(t_1) = 45 \\
& \quad \Longleftrightarrow \quad 20{,}78 t_1 = 45 \\
& \quad \Longleftrightarrow \quad t_1 = \frac{45}{20{,}78} \\
& \quad \Longleftrightarrow \quad t_1 = 2{,}165 \text{ s}
\end{aligned}
$$

La altura en dicho punto es

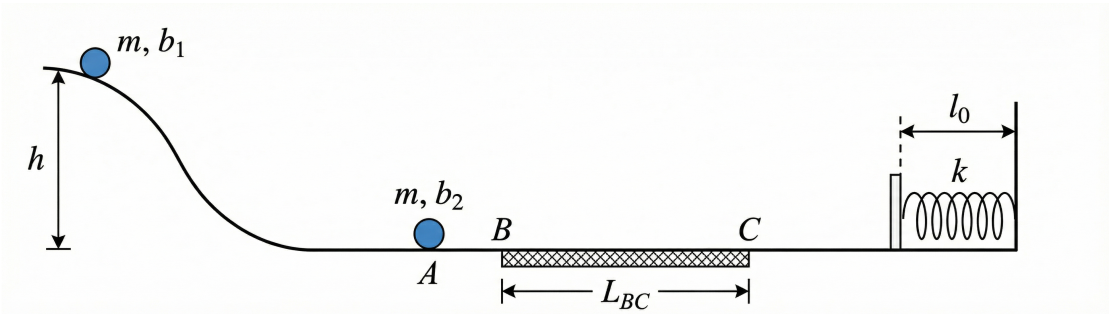
$$r_y(2{,}165) = 12 \cdot 2{,}165 - \frac{10}{2} 2{,}165^2 = 2{,}543 \text{ m}$$

Como $0 < 2{,}543 < 7$, la pelota entra en el arco.

Problema 2. Una bolita b_1 de masa m se encuentra en reposo en una loma, a una altura h, como se muestra en la figura. En un instante comienza a descender y choca con otra bolita idéntica, denotada b_2, que se encuentra en reposo en el punto A. Considere que el choque es perfectamente elástico. La bolita b_2 atraviesa un tramo del camino delimitado por los puntos B y C donde se ve afectada por el rozamiento con el piso (coeficiente de rozamiento μ_d). En el extremo final de la pista se encuentra un resorte de constante elástica k y longitud natural ℓ_0. La altura de la pista cumple la siguiente relación $h = 4\mu_d L_{BC}$.

(a) Calcular la velocidad v_{2B} de la bola b_2 en el punto B. Describa que pasa con la bola b_1 tras el choque.

(b) Calcule la longitud ℓ del resorte en su máxima compresión. Obtenga el trabajo hecho por el resorte durante su compresión e interprete el resultado.



(a) En el choque perfectamente elástico se preserva la energía cinética. Un corolario de esto es que, como la bola b_2 está quieta (velocidad nula) y las masas son idénticas, la bola b_1 "transferirá" toda su velocidad a la bola b_2 en el momento del impacto. Por ende, calcular la velocidad de b_2 en el punto B equivale a calcular la velocidad de la bola b_1 cuando termina de descender por la pendiente.

En el momento inicial, la energía potencial de la bola b_1 es dada por su altura y es mgh. Su energía cinética es nula. Al bajar la pendiente por completo, toda la energía potencial se transforma en energía cinética. Por conservación de la energía mecánica (pues no han actuado fuerzas no-conservativas), usando E_1 para denotar el instante en que b_1 ha descendido la pendiente:

$$E_0 = E_1$$

$\therefore\ U_0 = K_1$. Lo cual equivale a decir $mgh = \frac{1}{2}mv_1^2$, con v_1 la velocidad de la bola 1 al haber terminado el descenso. Se sigue que:

$$v_1 = \sqrt{2gh}$$

Esta es la velocidad inicial de la bola b_2 en el punto B.

(b) La bola b_2 continuará su recorrido, desacelerándose como consecuencia del rozamiento en el tramo L_{BC}, de manera tal que a partir del punto C su velocidad será menor a v_1. La pelota eventualmente toca el resorte y lo comprime, hasta que en un instante se detiene completamente. A dicho instante lo llamo instante final.

El rozamiento ocasiona una pérdida de energía. Por ende, la energía en el instante final es:

$$E_{\text{final}} = E_1 + W_{\text{fnc}}$$

Sabemos que $E_1 = K_1 = \frac{1}{2}mv_1^2 = mgh$. Y sabemos que $E_{\text{final}} = U_R = \frac{1}{2}kx^2$, pues no hay movimiento y el resorte está comprimido una distancia x.

El trabajo realizado por la fuerza de rozamiento (W_R) en el tramo BC es:

$$W_R = \overrightarrow{F}_R \cdot \Delta\overrightarrow{r} = -\mu_d mgL_{BC}$$

Sabemos que $h = 4\mu_d L_{BC}$. Por lo tanto,

$$\mu_d L_{BC} = \frac{h}{4} \implies W_R = -mg\left(\frac{h}{4}\right)$$

Continuamos:

$$\begin{aligned} E_{\text{final}} - E_1 &= W_R \\ U_f - K_1 &= W_R \\ \frac{1}{2}kx^2 - mgh &= -\frac{1}{4}mgh \end{aligned}$$

Simplificando:

$$\frac{1}{2}kx^2 = mgh - \frac{1}{4}mgh$$
$$\frac{1}{2}kx^2 = \frac{3}{4}mgh$$
$$kx^2 = \frac{3}{2}mgh$$
$$x^2 = \frac{1{,}5mgh}{k}$$
$$x = \sqrt{\frac{1{,}5\ mgh}{k}}$$

Como la longitud natural del resorte es ℓ_0, la longitud final del resorte en su máxima compresión será $\ell_f = \ell_0 - x$. Es decir:

$$\ell_f = \ell_0 - \sqrt{\frac{1{,}5\ mgh}{k}}$$

Sabemos que el trabajo realizado por un resorte que se compre una distancia x tiene magnitud

$$|W| = \frac{1}{2}kx^2 = U_f$$

Como el resorte durante su compresión se opone al movimiento, el trabajo es negativo. Por ende,

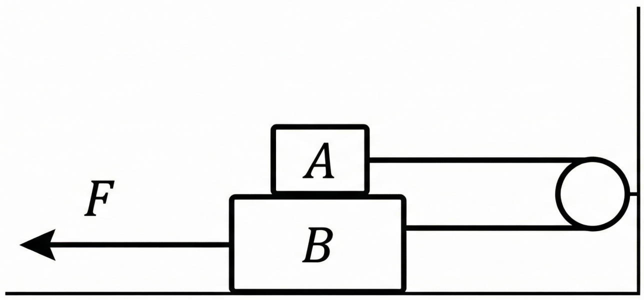
$$W = -\frac{1}{2}kx^2 = -\frac{1}{2}k\frac{1{,}5\ mgh}{k} = -0{,}75\ mgh\ \mathrm{J}$$

Problema 3. En el sistema que se muestra en la figura a continuación, el bloque A pesa 40 N y el B pesa 80 N. El coeficiente de rozamiento dinámico entre superficies es $\mu_d = 0{,}25$ y el estático $\mu_e = 0{,}4$. Se solicita calcular la fuerza $\vec{F}$ necesaria para arrastrar el bloque B hacia la izquierda con velocidad constante (despreciar el rozamiento en la polea) para lo cual:

(a) Realice el diagrama de cuerpo aislado para cada uno de los bloques teniendo en cuenta todas las fuerzas que actúan sobre los mismos.

(b) Calcular la fuerza $\vec{F}$ suponiendo que sólo existe roce entre los bloques.

(c) Calcular la fuerza $\vec{F}$ considerando para este caso adicionalmente la existencia de roce con el suelo.



(a) Sobre la masa A actúan:

- $\overrightarrow{N}_A = N_A\hat{j}$, fuerza normal por el contacto con B.
- $\overrightarrow{T} = T\hat{i}$ la fuerza de la soga.
- $\overrightarrow{R}_A = -R_A\,\hat{i}$ el rozamiento con el bloque B que se opone al movimiento.
- $\overrightarrow{G}_A = -m_A g\,\hat{j}$.

Sobre la masa B actúan:

- $\overrightarrow{N}_B = N_B\hat{j}$, fuerza noromal por el contacto con el suelo.
- $\overrightarrow{C} = -C\,\hat{j}$, fuerza normal con dirección hacia abajo por el contacto con A.

- $\overrightarrow{T} = T\hat{\imath}$ la fuerza de la soga.
- $\overrightarrow{R}_A = R_A\ \hat{\imath}$ el rozamiento que se opone al movimiento, que combina rozamiento con el suelo y con el bloque A.
- $\overrightarrow{G}_B = -m_B g\ \hat{\jmath}$.
- $\overrightarrow{F} = -F\ \hat{\imath}$, la fuerza externa aplicada.

Esto es suficiente para dibujar los diagramas de cuerpo aislado.

(b) Asumamos que B se mueve con velocidad constante. Debería ser claro entonces que a también se mueve con velocidad constante. En particular, A satisface

$$\begin{aligned}
&\sum_A \overrightarrow{F} = 0 \\
\iff\quad & N_A\hat{\jmath} + T\hat{\imath} - R_A\hat{\imath} - m_A g\hat{\jmath} = 0 \\
\iff\quad & (T - R_A)\,\hat{\imath} + (N_A - m_A g)\ \hat{\jmath} \\
\iff\quad & (T - \mu_d N_A)\,\hat{\imath} + (N_A - m_A g)\ \hat{\jmath} \\
\iff\quad & \begin{cases} T = \mu_d N_A \\ N_A = m_A g \end{cases}
\end{aligned}$$

Notar que al usar el coeficiente dinámica μ_d, estamos asumiendo que hay movimiento. (De otro modo, la suma de las fuerzas podría ser cero... pero porque la velocidad y la aceleración son ambas nulas!) De este resultado se sigue:

$$T = \mu_d m_A g$$

Ahora bien, usando el mismo razonamiento:

$$\begin{aligned}
&\sum_B \overrightarrow{F} = 0 \\
\iff\quad & N_B\hat{\jmath} - C\hat{\jmath} + T\hat{\imath} + R_B\hat{\imath} - m_B g\hat{\jmath} - F\hat{\imath} = 0
\end{aligned}$$

Como asumimos que no hay rozamiento con el suelo, $R_A = R_B$. Ahora bien, la fuerza normal $\overrightarrow{N_B}$ se opone a todas las fuerzas paralelas a la gravedad, i.e. las fuerzas de gravedad y contacto se cancelan con la normal (son cero). Entonces se simplifica:

$$
\begin{aligned}
& T\,\hat{\imath} + R_B\hat{\imath} - F\hat{\imath} = 0 \\
\iff \quad & F = T + R_B \\
\iff \quad & F = \mu_d m_A g + \mu_d \left|\overrightarrow{C}\right|
\end{aligned}
$$

Notar que, como el rozamiento es entre A y B, la fuerza del rozamiento depende de la magnitud del vector de contacto. Así como el rozamiento con el suelo depende de la magnitud del vector normal. La magnitud del contacto es simplemente dada por el peso de A. Concluimos:

$$
F = \mu_d m_A g + \mu_d m_a g = 2\mu_d m_A g
$$

(c) Si hay rozamiento en ambos lados, no se cumple $R_B = R_A$, sino $R_B = R_B + R_{\text{suelo}}$. Esto nos da

$$
\begin{aligned}
R_B &= \mu_d \left|\overrightarrow{C}\right| + \mu_d \left|\overrightarrow{N}_B\right| \\
&= \mu_d \left(m_A g + (m_A g + m_B g)\right) \\
&= \mu_d g \left(2m_A + m_B\right)
\end{aligned}
$$

pues la fuerz normal de B, como ya dijimos, se opone a la fuerza de contacto y a la gravedad. En conclusión,

$$
\begin{aligned}
& F = T + R_B \\
\iff \quad & \mu_d m_A g +_d \cdot 2m_A g + \mu_d g m_B \\
\iff \quad & 3\mu_d m_A g + \mu_d g m_B
\end{aligned}
$$

En un examen real, habría que sacar las cuentas. Pero esa es la parte tonta.

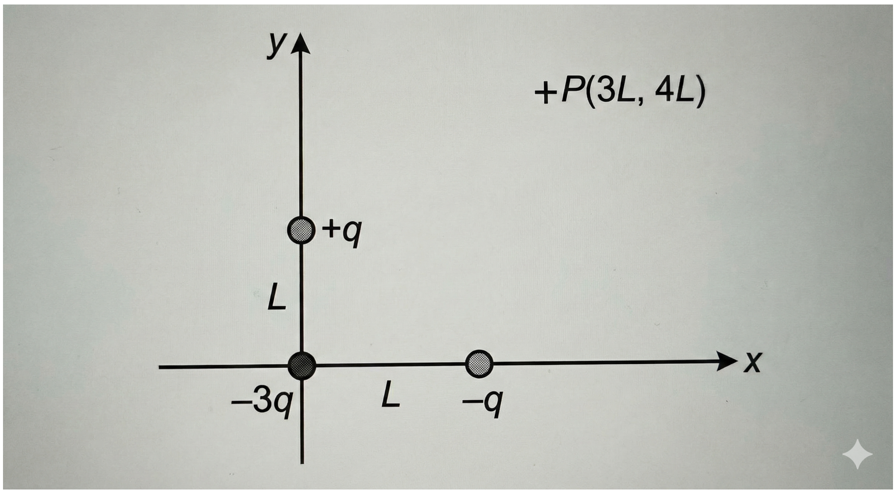
8. Parcial 2 - 2025

Problema 1. Considere la distribución de cargas que se muestra en la figura a continuación. Considerando que las cargas están fijas, determine:

(a) El campo eléctrico total $\vec{E}_p$ en el punto P debido a las tres cargas. Indicar la expresión vectorial del campo en términos de q y L sabiendo que las coordenadas del punto son $(3L, 4L)$. Dibuje el vector campo eléctrico total en el punto P.

(b) El trabajo que debe realizar un agente externo para traer una carga de prueba q_0 desde el infinito hasta el punto P, considerando que el potencial en el infinito es cero.

(c) El trabajo realizado por el campo eléctrico cuando la carga q_0 se traslada desde el infinito hasta el punto P.



(a) Hay que calcular la distancia que tiene P con cada carga.

Debería ser fácil notar que dichas distancias son

$$r_+ = \sqrt{(3L)^2 + (3L)^2} = \sqrt{18L^2} = \sqrt{2 \cdot 9}L = 3\sqrt{2}L$$
$$r_o = \sqrt{(3L)^2 + (4L)^2} = \sqrt{25L^2} = 5L$$
$$r_- = \sqrt{(2L)^2 + (4L)^2} = \sqrt{20}L = 2\sqrt{5}L$$

Ahora que tenemos las distanacias, i.e. las magnitudes de los vectores que apuntan desde cada carga al punto, determinamos los vectores unitarios (de dirección), *imaginando que cada uno parte del origen*.

$$
\begin{aligned}
\hat{r}_+ &= \frac{3L\hat{\imath} + 3L\hat{\jmath}}{3\sqrt{2}L} = \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{\imath} + \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{\jmath} \\
\hat{r}_o &= -\frac{3L\hat{\imath} + 4\hat{L}j}{5L} = -\frac{3}{5}\,\hat{\imath} - \frac{4}{5}\,\hat{\jmath} \\
\hat{r}_- &= -\frac{2L\hat{\imath} + 4L\hat{\jmath}}{2\sqrt{5}L} = -\frac{1}{\sqrt{5}}\,\hat{\imath} - \frac{2}{\sqrt{5}}\,\hat{\jmath}
\end{aligned}
$$

Veamos que

El campo generado será la suma de los campos:

$$
\begin{aligned}
E &= \overrightarrow{E}_+ + \overrightarrow{E}_- + \overrightarrow{E}_o \\
&= \kappa\frac{q}{r_+^2}\hat{r}_+ + \kappa\frac{q}{r_-^2}\hat{r_-} + \kappa\frac{3q}{r_o^2}\hat{r_o} \\
&= \kappa\frac{q}{18L^2}\hat{r}_+ + \kappa\frac{q}{20L^2}\hat{r_-} + \kappa\frac{3q}{25L^2}\hat{r_o} \\
&= \frac{kq}{L^2}\left[\frac{1}{18}(\hat{r}_+) + \frac{3}{25}(\hat{r}_o) + \frac{1}{20}(\hat{r}_-)\right] \\
&\approx \frac{kq}{L^2}\left[-0{,}055\hat{\imath} - 0{,}101\hat{\jmath}\right] \\
&= \frac{kq}{L^2}\overrightarrow{w}
\end{aligned}
$$

con $\overrightarrow{w} = (-0{,}055, -0{,}101)$.

(b) El trabajo realizado por un campo al mover una carga q_0 es

$$W_{\text{campo}} = -\Delta U = -q_0\Delta V$$

El trabajo que debemos realizar para mover una carga *hacia* la fuente del campo debe precisamente contrarrestar el del campo. Por ende, es

$$W = q_0 \Delta V = q_0(V_P - V_\infty) = q_0(V_P - 0) = q_0 V_P$$

donde V_P, el potencial en el punto P, es la suma de los potenciales generados por cada carga:

$$V_P = \underbrace{k\frac{(+q)}{3\sqrt{2}L}}_{\text{Carga de arriba}} + \underbrace{k\frac{(-3q)}{5L}}_{\text{Carga del origen}} + \underbrace{k\frac{(-q)}{2\sqrt{5}L}}_{\text{Carga de la derecha}} = \frac{kq}{L}\left(\frac{1}{3\sqrt{2}} - \frac{3}{5} - \frac{1}{2\sqrt{5}}\right)$$

Que de igual modo no se puede simplificar demasiado porque L y q son desconocidas. Lo dejamos así.

(c) El trabajo realizado por el campo ya se dijo que es $W_{\text{campo}} = -q_0 \Delta V = -q_0 V_P$.

2. Considere el circuito de la figura adjunta. El mismo contiene 2 resistencias, $R_1 = 2\text{k}\Omega$ y $R_2 = 3\text{k}\Omega$, y 2 condensadores, $C_1 = 2\mu\text{F}$ y $C_2 = 3\mu\text{F}$, conectados a una batería de 120V. Los condensadores están completamente descargados al momento de cerrar el interruptor S. Determine:

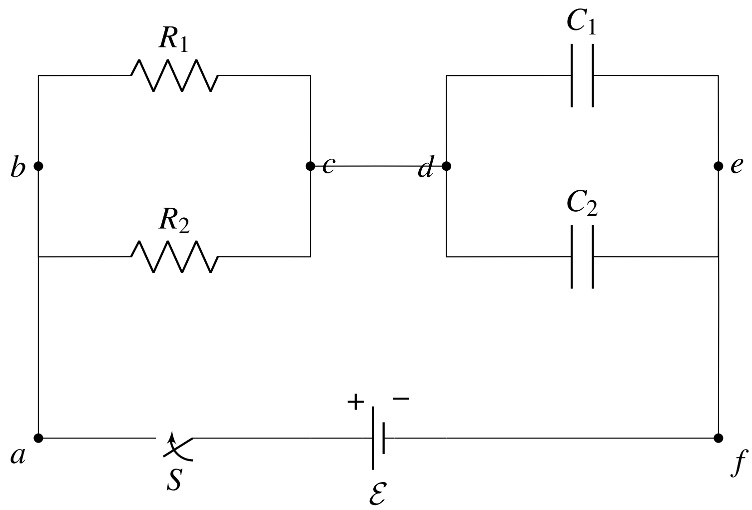
(a) El circuito equivalente (1 capacitor, 1 resistencia y la fuente).

(b) ¿Cuál es la constante de tiempo del circuito equivalente?

(c) La carga total almacenada en el circuito y el tiempo para el cual se alcanza un quinto de este valor.

(d) Las cargas q_1 y q_2 almacenadas en los capacitores C_1 y C_2 respectivamente después de un tiempo muy largo.

(e) La diferencia de potencial V entre los puntos: i- bc, ii- de, iii- be. ¿Cómo se relacionan estas tres cantidades?



(a) El circuito equivalente es con una sola capacitancia y una sola resistencia es

```
|-- RESISTENCIA --- CAPACITANCIA ---|
|                                   |
|                                   |
|----------- Voltaje ---------------|
```

con $R_{12} = 6/5\text{k}\Omega$, $C_{12} = 5\mu\text{F}$.

(b) La constante de tiempo de un circuito es $\tau = R \cdot C$. En nuestro caso, esto da

$$\begin{aligned}
\frac{6}{5}\mathrm{k}\Omega \cdot 5\mu\mathrm{F} &= 6\Omega\mathrm{F}\ \mathrm{k}\mu \\
&= 6\mathrm{s} \cdot 10^{3} \cdot 10^{-6} \\
&= 6 \times 10^{-3}\mathrm{s} \\
&= 6\mathrm{ms}
\end{aligned}$$

(c) Sabemos que $V = \frac{Q}{C}$. Entonces $Q = VC$. Entonces

$$\begin{aligned}
Q &= 120\mathrm{V} \cdot 5 \times 10^{-6}\ \mathrm{F} \\
&= 600\mathrm{C} \times 10^{-6} \\
&= 6 \times 10^{-4}\mathrm{C}
\end{aligned}$$

La carga almacenada en un circuito obedece

$$q(t) = Q_{\max}\left(1 - e^{-t/\tau}\right)$$

Entonces el tiempo t_0 tal que la carga es un quinto del valor hallado satisface

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{5} \cdot (6 \times 10^{-4}\mathrm{C}) = (6 \times 10^{-4}\mathrm{C})\left(1 - e^{-t_0/\tau}\right) \\
\iff\quad & e^{-t_0/\tau} = \frac{4}{5} \\
\iff\quad & -t_0/\tau = \ln\left(\frac{4}{5}\right) \\
\iff\quad & t_0 = -\tau \ln\left(\frac{4}{5}\right) \\
\iff\quad & t_0 = -6 \times 10^{-3} \times \ln(\frac{4}{5}) \\
\iff\quad & t_0 = 0{,}0013388613\mathrm{s} \\
\iff\quad & t_0 \approx 1{,}34\mathrm{ms}
\end{aligned}$$

(d) Después de un tiempo muy largo la carga del circuito total es máxima. Los capacitores en paralelo tienen el mismo voltaje. Por ende,

$$\begin{aligned} Q_1 &= V \cdot C_1 \\ &= 120 \times 2 \times \times 10^{-6}\ \mathrm{C} \\ &= 240 \times 10^{-6}\mathrm{C} \\ &= 2{,}4 \times 10^{-4}\ \mathrm{C} \end{aligned}$$

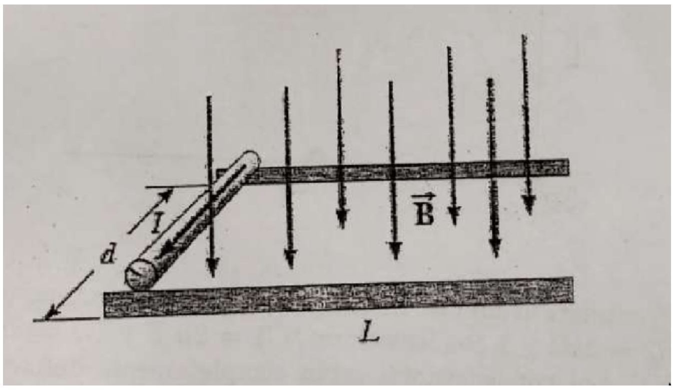
La carga en el otro capacitor debe ser la carga total menos la carga Q_1, o sea $(6 - 2{,}4) \times 10^{-4}\mathrm{C} = 3{,}6 \times 10^{-4}\mathrm{C}$.

(e) Entre b y c no circula corriente por estar cerrada la llave. Por ley de Ohm, el voltaje es cero. La suma del voltaje de los componentes debe ser el voltaje de la fuente, por ende entre e y d el voltaje es 120V.

3. Una varilla con 0,720 kg de masa descansa sobre dos rieles paralelos como en la figura, que están separados por un valor d = 12,0 cm y tiene una longitud L = 45,0 cm de largo. La varilla conduce una corriente I = 48,0 A en la dirección que se muestra y desliza sobre los rieles. Perpendicularmente a la varilla y a los rieles existe un campo magnético uniforme de magnitud 0,240 T.

(a) Indique la magnitud, dirección y sentido de la fuerza que el campo magnético ejerce sobre la varilla con corriente. Indique también el vector aceleración que adquiere la varilla debido a dicha fuerza.

(b) Si parte del reposo, ¿cuál será la velocidad de la varilla cuando llegue al final de los rieles?



(a) La magnitud de la fuerza ejercida por un campo magnético $\overrightarrow{B}$ sobre un cable conductor con corriente I y vector de longitud y dirección de corriente $\overrightarrow{D}$ es

$$F_m = I\left(\overrightarrow{D} \times \overrightarrow{B}\right)$$

En este caso, $\overrightarrow{D}$ es perpendicular a $\overrightarrow{B}$ y por ende el seno de sus ángulos es 1. Por lo tanto, resulta

$$F_m = IBd$$

La dirección de la fuerza está dada por la regla de la mano derecha. La dirección es $\hat{\imath}$ (hacia la derecha), tomando nuestra perspectiva en la imagen. Por ende, $\overrightarrow{F}_m = IBd\ \hat{\imath}$ basta para indicar dirección, magnitud y sentido. Podemos simplificar:

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{F}_m &= IBd\,\hat{\imath} \\
&= 48\text{A} \cdot 0{,}24\text{T} \cdot 0{,}12\text{m} \\
&= 1{,}3824\text{N}\,\hat{\imath}
\end{aligned}
$$

Se nos pide también la aceleración que adquiere la varilla debido a dicha fuerza. Esto es, por segunda ley de Newton,

$$
\begin{aligned}
a &= \frac{F_m}{m} \\
&= \frac{1{,}3824\text{N}}{0{,}720\text{kg}} \\
&= 1{,}92\ \text{m/s}^2
\end{aligned}
$$

(b) Miremos la varilla como un punto que se mueve de izquierda a derecha. Su movimiento horizontal, como hemos observado, tiene una aceleración constante. El final de los rieles se corresponde con recorrer una distanca de $L = 0{,}45\text{m}$. La ecuación de Torricelli garantiza que, para una aceleración constante,

$$
v_f^2 = v_0^2 + 2a\Delta x
$$

Como parte del reposo, la velocidad inicial es nula. Obtenemos

$$
\begin{aligned}
& v_f^2 = 2a\Delta x \\
\iff\quad & v_f^2 = 2 \cdot 1{,}92 \cdot 0{,}45\ \text{m}^2/\text{s}^2 \\
\iff\quad & v_f = \sqrt{2 \cdot 1{,}92 \cdot 0{,}45}\ \text{m/s} \\
& v_f \approx 1{,}314\text{m/s}
\end{aligned}
$$

9. Parcial 1 - 2024

1. Un golfista golpea una pelota con una velocidad inicial de 48 m/s con un ángulo de 25° con la horizontal. Sabiendo que el terreno tiene una pendiente de 5° (como se muestra en la figura), determinar:

(a) Los vectores aceleración $\vec{a}(t)$, velocidad $\vec{v}(t)$ y posición $\vec{r}(t)$ del proyectil durante el movimiento. Dibuje el sistema de coordenadas elegido.

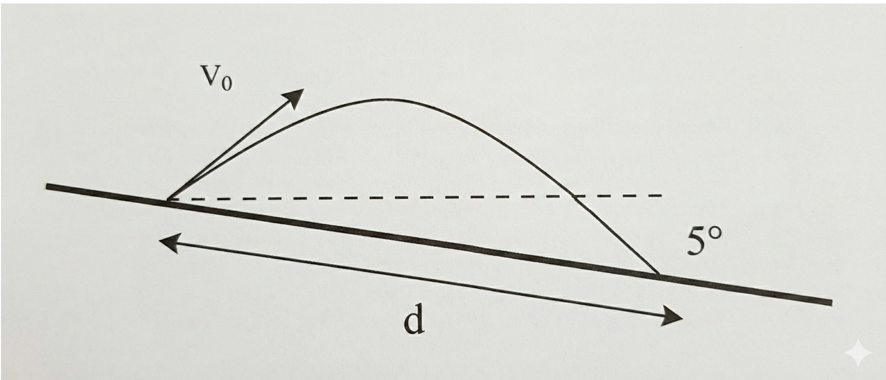
(b) El tiempo en que alcanza la altura máxima,

(c) La distancia entre el golfista y el punto en que la pelota toca el piso,

(d) La velocidad con que la pelota toca el piso.

(e) Grafique las funciones $x(t)$, $y(t)$ mientras durante el movimiento. Dibuje los vectores velocidad y aceleración, en el punto mas alto y justo antes de chocar contra el piso.

Considere que la aceleración de la gravedad es 10 m/s^2.



(a) Elegimos un sistema de coordenadas tal que el eje x esté alineado con la horizontal y el origen coincide con el punto del que parte la pelota. Por lo tanto, el ángulo entre $\overrightarrow{v_0}$ y el eje horizontal de nuestro sistema es $\theta = 25°$. En consecuencia,

$$\overrightarrow{v_0} = v_0 \cos\theta\, \hat{i} + v_0 \sin\theta\, \hat{j}$$

La aceleración horizontal es nula y la aceleración vertical se debe estrictamente a la gravedad y es constante: $a_y(t) = -g$. La velocidad vertical $v_{0y} - gt$. La posición vertical es $y(t) = y_0 + v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2$.

Como la aceleración horizontal es nula la velocidad horizontal es constante: $v_x(t) = v_{0x}$. La posición horizontal por ende es $x(t) = x_0 + v_{0x}t$. Usando que $x_0 = y_0 = 0$ y los valores de v_{0x}, v_{yx}, obtenemos:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{a}(t) &= -g\ \hat{j} \\
\overrightarrow{v}(t) &= v_0 \cos\theta\ \hat{\imath} + [v_0 \sin\theta - gt]\ \ \hat{j} \\
\overrightarrow{r}(t) &= v_0 \cos\theta \cdot t\ \hat{\imath} + \left[v_0 \sin\theta \cdot t - \frac{1}{2}gt^2\right]\ \hat{j}
\end{aligned}$$

(b) La altura máxima es

$$\begin{aligned}
H &= \frac{v_0^2 \sin^2\theta}{2g} \\
&= \frac{48^2 \cdot 0{,}422^2}{2 \cdot 10}\ \mathrm{m} \\
&= 20{,}515\ \mathrm{m}
\end{aligned}$$

El tiempo t_m en que se alcanza la altura máxima satisface (obviando unidades):

$$\begin{aligned}
& y(t_m) = 20{,}515 \\
\iff\quad & v_0 \sin\theta\ t_m - \frac{1}{2}gt_m^2 = 20{,}515 \\
\iff\quad & 48 \cdot 0{,}422\ t_m - \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot t_m^2 = 20{,}515 \\
\iff\quad & 20{,}256t_m - 5t_m^2 - 20{,}515 = 0
\end{aligned}$$

Esta es una cuadrática con $a = -5, b = 20{,}256, c = -20{,}515$. El discriminante de una cuadrática invertida (con $a < 0$) siempre es cero en el vértice. Por ende, la fórmula de Bhaskara se simplifica a $t_m = -\frac{b}{2a} = \frac{20{,}256}{10}\mathrm{s} = 2{,}0256\mathrm{s}$.

(c) Nos piden hallar d. d es la hipotenusa de un triángulo rectángulo formado entre el eje x y la pendiente, donde el ángulo recto es formado en el lado que "parte" del eje x hacia abajo hasta tocar la pendiente en el punto en que cae la pelota. Es fácil ver que la longitud horizontal del triángulo es $d\cos\alpha$, la vertical $d\sin\alpha$, con $\alpha = 5°$. Esto quiere decir que si la pelota cae en un instante de tiempo t_f, debe cumplirse que

$$\overrightarrow{r}(t_f) = d\cos\alpha\,\hat{\imath} - d\sin\alpha\,\hat{\jmath}$$

Planteando esto como un sistema de ecuaciones, significa que

$$\begin{cases} v_0\cos\theta\cdot t_f & = d\cos\alpha \\ v_0\sin\theta\cdot t_f - \frac{1}{2}gt_f^2 & = -d\sin\alpha \end{cases}$$

El sistema tiene dos incógnitas y dos ecuaciones así que anda joya. Sólo despejamos. De la primera ecuación se sigue

$$t_f = \frac{d\cos\alpha}{v_0\cos\theta}$$

Sustituyendo en la segunda ecuación y tras una serie de simplificaciones, llegamos a

$$\begin{aligned} & v_0\sin\theta\frac{d\cos\alpha}{v_0\cos\theta} - \frac{1}{2}g\left(\frac{d\cos\alpha}{v_0\cos\theta}\right)^2 = -d\sin\alpha \\ \iff\quad & \tan\theta\cos\alpha - \frac{1}{2}gd\cdot\varphi^2 = -\sin\alpha \\ \iff\quad & \frac{1}{2}gd\cdot\varphi^2 = \sin\alpha + \tan\theta\cos\alpha \\ \iff\quad & d = 2\cdot\frac{\sin\alpha + \tan\theta\cos\alpha}{g\cdot\varphi^2} \end{aligned}$$

con $\varphi = \frac{\cos\alpha}{v_0\cos\theta}$. Calculando, $\varphi \approx 0{,}023$. Por ende,

$$d \approx 208{,}578\text{ m}$$

(d) Ya sabemos que t_f es el instante en que la pelota toca el piso. Podemos simplemente calcular $v(t_f)$.

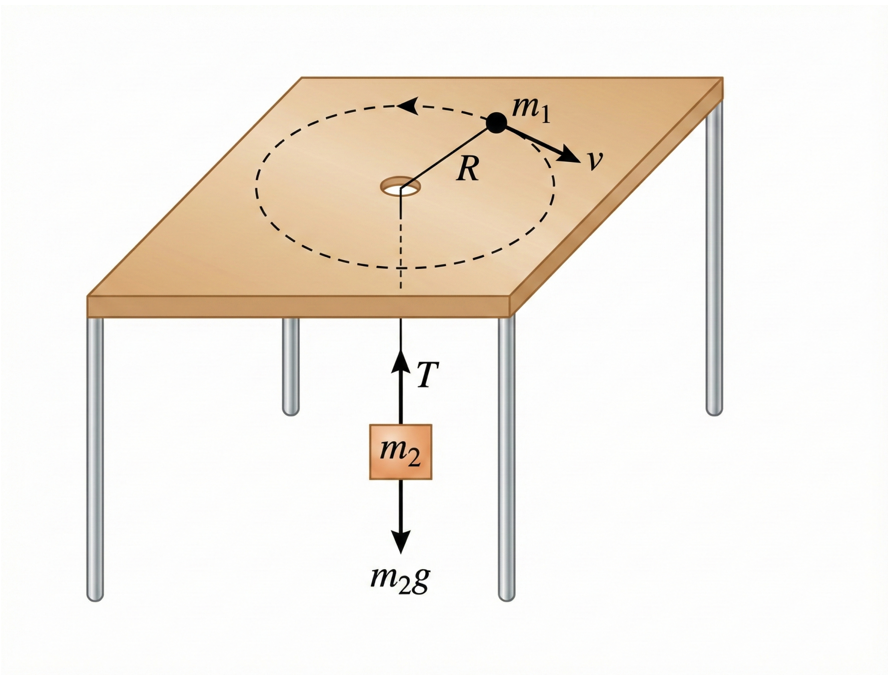
2. Una masa $m_1 = 1$ kg se une a cuerda de masa despreciable e inextensible y se la hace girar en un círculo de radio $R = 1,5$ m sobre una mesa sin fricción. El otro extremo de la cuerda pasa por un pequeño orificio en el centro de la mesa, y una masa m_2 se une a la cuerda (ver figura). La masa $m_2 = 500$ gr permanece suspendida en equilibrio mientras la masa m_1 gira a una velocidad angular constante. Resuelva los siguientes puntos:

(a) Realice un diagrama de cuerpo aislado de cada uno de los cuerpos.

(b) Determine la tensión T de la cuerda.

(c) Determine la velocidad tangencial de la masa m_1 para que la masa m_2 permanezca suspendida.

(a) A la masa 1 la afectan la tensión de la cuerda (fuerza centrípeta), la gravedad y la normal (que se cancelan). A la masa 2 la afectan la gravedad y la tensión, que deben contrarrestarse pues dicha masa está en equilibrio.



(b) Obviamente $T = m_2g$. Si uno quiere hacer la derivación formal de esto, solo basta notar que $\overrightarrow{T} + \overrightarrow{G}_2 = m_2a_2\hat{j}$ por segunda ley de Newton aplicada a la masa 2. Como la aceleración de esa masa es cero, obtenemos lo deseado.

(c) Para que la masa dos permanezca suspendida, su aceleración debe ser nula, es decir que debe cumplirse $T = m_2 g$. T es la tensión de la cuerda, es decir la fuerza centrípeta de la masa 1. Es decir,

$$a_c m_1 = \sum \overrightarrow{F}_{\text{centrípeta}} = \overrightarrow{T}$$

Analizando en magnitud, $a_c = \frac{T}{m_1}$. Es decir que para que la masa 2 esté en equilibrio, debemos tener $a_c = \frac{m_2 g}{m_1}$. Dada una aceleración centrípeta, la velocidad angular satisface

$$a_c = \frac{v^2}{R} \iff v^2 = a_c R$$

Por ende, asumiendo estas condiciones

$$v^2 = \frac{m_2 g}{m_1} \cdot R = \frac{0{,}5\text{kg} \cdot 9{,}8\text{m/s}^2}{1\text{kg}} \cdot 1{,}5\text{m} = 7{,}35(\text{m/s})^2$$

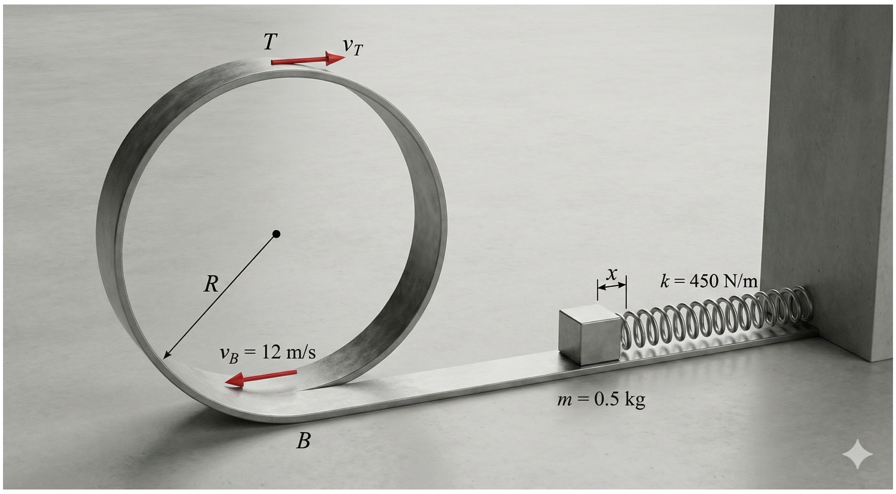
Por ende, $v = \sqrt{7{,}35}\text{m/s} = 2{,}711\text{m/s}$.

3. Un bloque de masa $m = 0,5$ kg es empujado hacia un resorte (de masa despreciable) hasta que el resorte se comprime una distancia x. La constante de fuerza del resorte es $k = 450$ N/m. A continuación se libera el bloque y el mismo viaja por una pista sin rozamiento hacia el punto B y continua por la pista circular de radio $R = 1$m (observe la figura). La velocidad del bloque en el punto B es $v_B = 12$ m/s. El bloque sufre a lo largo de la pista circular una fuerza de fricción de 7N. Determine:

   (a) La longitud de compresión x.

   (b) El trabajo realizado para comprimir el resorte. El trabajo realizado una vez que se libera el bloque y hasta que llega al punto B.

   (c) ¿El bloque llega a la parte superior de la pista o se desprende antes? Si llega, calcule la velocidad en la parte superior, v_T, si no, calcule el punto de la pista en el cual se despega.



(a) Le energía en el momento inicial (justo antes de que la masa se dispare, con el resorte comprimido) es estrictamente potencial (no hay movimiento pero hay compresión en el resorte). La energía en el momento en que la masa está en B, la energía es estrictamente cinética. No hubo rozamiento y por ende no actuaron fuerzas no-conservativas. Por ende aplica conservación de la energía:

$$
\begin{aligned}
& E_0 = E_B \\
\iff\quad & U_0 = K_B \\
\iff\quad & \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}mv_B^2 \\
\iff\quad & x^2 = \frac{m}{k}v_B^2 \\
\iff\quad & x = \sqrt{\frac{0{,}5}{450}\ \mathrm{s}^2} 12\ \mathrm{m/s} \\
\iff\quad & x = \frac{2}{5}\ \mathrm{m}
\end{aligned}
$$

(b) Entre el momento inicial y el momento B, solo el resorte realiza trabajo. Sabemos entonces que $W_{\text{total}} = W_{\text{resorte}}$ en dicho intervalo de tiempo. Pero $W_{\text{total}} = \Delta K$. Por ende $W_{\text{resorte}} = \frac{1}{2}mv_B^2$. Alternativamente, el trabajo realizado por las fuerzas conservativas (y el resorte es una) satisface $W_{\text{cons}} = -\Delta U = -(U_f - U_i) = U_i = \frac{1}{2}kx^2$. Es fácil comprobar que estas expresiones son iguales para nuestro caso. Ambas dan

$$
\frac{1}{2}mv_B^2 = 36\mathrm{J}
$$

(c) La altura en el punto T es $2R$. En el punto B, justo debajo de T, es cero. Sabemos que el trabajo de las fuerzas no conservativas equivale al cambio en la energía mecánica:

$$
\begin{aligned}
& W_{\text{friccion}} = \Delta E \\
\iff\quad & \overrightarrow{F_{\text{fric}}} \cdot \Delta\overrightarrow{r} = E_T - E_B \\
\iff\quad & -7\mathrm{N} \cdot \pi R = (K_T + U_T) - (K_B + U_B) \\
\iff\quad & -7\pi\ \mathrm{J} = \left(\frac{1}{2}mv_T^2 + mg2R\right) - \left(\frac{1}{2}mv_B^2 + 0\right) \\
\iff\quad & \frac{1}{2}mv_T^2 = -7\pi + \frac{1}{2}mv_B^2 - mg2R \\
\iff\quad & v_T^2 = \frac{2}{m}\left(-7\pi + \frac{1}{2}mv_B^2 - mg2R\right) \\
\iff\quad & v_T = \sqrt{\frac{2}{m}\left(-7\pi + \frac{1}{2}mv_B^2 - mg2R\right)}\ \mathrm{m/s} \\
\iff\quad & v_T \approx 4{,}10\ \mathrm{m/s}
\end{aligned}
$$

En el punto T, la gravedad y la normal (fuerza de contacto con la superficie) empujan ambas hacia abajo, formando una fuerza centrípeta. Se cumple entonces que, en magnitud,

$$a_c = g + \frac{N}{m}$$

Pero por describir un movimiento circular, se cumple

$$a_c = \frac{v_T^2}{R}$$

Por lo tanto,

$$g + \frac{N}{m} = \frac{v_T^2}{R}$$

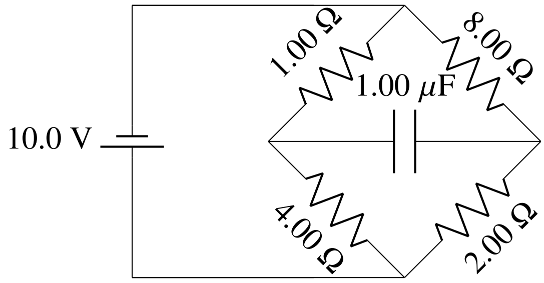
El caso límite en que la masa cae (se despega de la pista) sucede cuando la fuerza normal es cero, porque eso significa que ya no hay contacto entre la superficie y la masa. Entonces acá podemos sacar cuál es la velocidad que hace que N sea igual a cero. Si $N = 0$, se cumple

$$gR = v_T^2 \Rightarrow v_T = \sqrt{9{,}8 \cdot R} \text{ m/s} \approx 3{,}13 \text{ m/s}$$

Es decir que si la velocidad baja a 3.13 metros por segundo, la fuerza de contacto desaparece. Pero observamos que la velocidad en el punto alto es 4.10 metros por segundo. La masa no se desprende antes de llegar a T.

10. Parcial 2 - 2023

1. Considere el circuito de la figura en dos situaciones:



(a) Suponga que ha estado conectado durante mucho tiempo (infinito), llegando a su estado estacionario.

En este caso: i) ¿Cuál es la corriente que circula por la fuente?, ii) ¿cuál es la corriente que circula por el capacitor?, iii) calcule la diferencia de potencial a través del capacitor.

(b) Considere ahora que se desconecta la batería, permitiendo la descarga del capacitor.

En este caso, ¿cuánto tiempo tarda el capacitor en descargarse hasta la décima parte de su voltaje inicial?

Solución. (a) El diagrama lógico del circuito es:

```
h ---------g--------- f
|          |          |
|          1ohm       8ohm
|          |          |
10V        d----|C|---e
|          |          |
|          4ohm       2ohm
|          |          |
a----------b----------c
```

Por convención diremos que la referencia (voltaje cero) está en `h`, de modo tal que los nodos `h, g, f` tiene un voltaje de 0V. Similarmente, `a, b, c` tienen voltaje 10.

Por el capacitor no pasa ninguna corriente, pues ha alcanzado su equilibrio estacionario. Sea I_1 la corriente que recorre $b \to g$, I_2 la recorre $c \to f$. El tramo $b \to g$ se puede modelar como un único resistor con resistencia 5Ω, $c \to f$ como uno con resistencia 10Ω. Pues ambos están en paralelo, la resistencia total es $(5 \cdot 10)/15 = 10/3\Omega$.

Por Ley de Ohm, $V = IR$, i.e. $I = V/R$. Por ende, como I_2 es la corriente que atraviesa el resistor izquierda de resistencia 5Ω, debe satisfacer

$$I_2 = \frac{V_b - V_g}{5\Omega} = \frac{10V - 0V}{5\Omega} = 2\text{A}$$

Similarmente,

$$I_3 = \frac{10V}{10\Omega} = 1\text{A}$$

Por ende, la corriente total (por Ley de Kirchhoff) es $I = I_1 + I_2 = 3\text{A}$. Alternativamente, podríamos haber usado la Ley de Ohm sobre todo el circuito:

$$I = \frac{V}{R_{\text{eq}}} = \frac{10V}{\frac{10}{3}\Omega} = 3\text{A}$$

Ahora bien, nos piden encontrar la diferencia de potencial a través del capacitor. Es fácil ver por Ley de Ohm que el voltaje en d es $I_2 \cdot 4\Omega = 8V$, y el voltaje en e es $I_3 \cdot 2\Omega = 2V$. Por ende, la diferencia de potencial entre e y d es de 6V.

(b) Sabemos que

$$q(t) = Q_{\max} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

con $\tau = RC$ define el tiempo de descarga. Aquí, $Q := Q_{\max}$ satisface $V = \frac{Q}{C}$ y por ende

$$Q = CV = 1\mu\text{F} \cdot 6V = 6\mu\text{C}$$

pues ya calculamos que el voltaje del capacitor era 6V. Por lo tanto, el tiempo t_* en que el capacitor se descarga hasta la décima parte de su voltaje inicial satisface

$$V(t_*) := \frac{q(t_*)}{C} = \frac{1}{10} \cdot 6\text{V} = \frac{3}{5}V$$

Por sustitución, esto vale si y solo si

$$
\begin{aligned}
& \frac{Q \exp\left(-t_*/\tau\right)}{C} = \frac{3}{5}\mathrm{V} \\
\iff \quad & 6\mu\mathrm{C} \cdot \frac{\exp\left(-t_*/RC\right)}{1\mu\mathrm{F}} = \frac{3}{5}V \\
\iff \quad & 6V \cdot \exp\left(-t_*/RC\right) = \frac{3}{5}V \\
\iff \quad & \exp(-t_*/RC) = \frac{1}{10} \\
\iff \quad & -\frac{t_*}{RC} = \ln\left(\frac{1}{10}\right) \\
\iff \quad & t_* = -\ln\left(\frac{1}{10}\right) RC
\end{aligned}
$$

Acá hay que ser cuidadosos. Como ahora fluye energía a través del capacitor, las resistencias cambian. Ahora es mejor modelar (b, c, d, e) como una resistencia y (d, e, g, f) como otra. Se cumple

$$
R_{bcde} = \frac{4 \cdot 2}{6} = \frac{4}{3}\Omega, \qquad R_{degf} = \frac{8}{9}\Omega, \qquad R = R_{bcde} + R_{degf} = 2{,}4\Omega
$$

Usando este valor,

$$
\begin{aligned}
& t_* = -\ln\left(\frac{1}{10}\right) RC \\
\iff \quad & t_* \approx (2{,}3025) \cdot (2{,}4) \cdot (10^{-6})\ \mathrm{s} \\
\iff \quad & t_* \approx 5{,}53\ \mu\mathrm{s}
\end{aligned}
$$

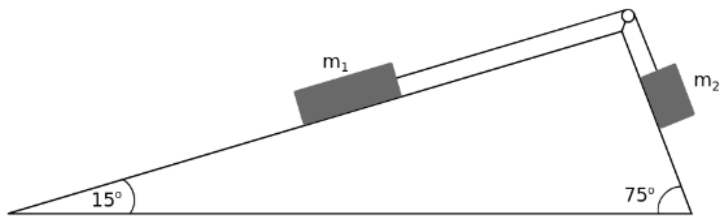
11. Final 2017-12-07

1. Dos masas m_1 y m_2 se encuentran en sendos planos inclinados, sin rozamiento y unidos por una cuerda sin masa e inextensible tal como se indica en la figura.

(a) **(5 pts.)** Represente las fuerzas que intervienen sobre cada masa en sus respectivos diagramas de cuerpo aislado.

(b) **(12.5 pts.)** Calcule los vectores aceleraciones de las masas. Además, indique hacia dónde se moverá el sistema para el caso particular en que las masas sean idénticas.

(c) **(12.5 pts.)** ¿Qué relación debe haber entre las masas para que el sistema permanezca en equilibrio y no deslice?. ¿Cuánto valen las tensiones de la cuerda en este caso?.



(a) Una pavada, se deja al lector.

(b) Definimos

$$\hat{i}' = (\cos\theta, \sin\theta), \qquad \hat{j}' = (-\sin\theta, \cos\theta)$$

los vectores unitarios paralelo y perpendicular a la pendiente, respectivamente, con $\theta = 15°$. La proyección de la gravedad en componentes paralelo y perpendicular a la pendiente, para la masa m_1, es

$$G_{1\|} := \overrightarrow{G_1} \cdot \hat{i}' = -m_1 g \sin\theta, \qquad G_{1\perp} := \overrightarrow{G_1} \cdot \hat{j}' = m_1 g \cos\theta$$

Por ende, la aceleración de la primera masa satisface

$$
\begin{aligned}
&(G_{1\parallel} + T)\hat{\imath}' + (G_{1\perp} + N)\hat{\jmath}' = m_1\overrightarrow{a_1} \\
\iff \quad & a_{1x} = \frac{-m_1 g \sin\theta + T}{m_1}, \qquad a_{1y} = \frac{m_1 g \cos\theta + N}{m}
\end{aligned}
$$

donde a_x, a_y deben entenderse en el sistema de coordenadas definido por $\hat{\imath}', \hat{\jmath}'$.

Ahora nos vamos a otro sistema de coordenadas, definido por $\hat{v}$ (unitario y paralelo a la pendiente de m_2, apuntando hacia abajo) y $\hat{w}$ (unitario y perpendicular a la pendiente de m_2, apuntando a la derecha). Más concretamente,

$$
\hat{v} = (\sin\theta, -\cos\theta), \qquad \hat{w} = (\cos\theta, \sin\theta)
$$

Notar que $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{i'}$, como es de esperar (usaremos esto pronto). De vuelta, los componentes de la gravedad en la masa m_2 son

$$
G_{2\parallel} := \overrightarrow{G_2} \cdot \overrightarrow{v} = m_2 g \cos\theta, \qquad G_{2\perp} := \overrightarrow{G_2} \cdot \overrightarrow{w} = -m_2 g \sin\theta
$$

Por ende

$$
(m_2 g \cos\theta - T)\hat{v} + (-m_2 g \sin\theta + N)\overrightarrow{w} = m_2 \overrightarrow{a}_2
$$

Tenemos ambas aceleraciones, una en términos de $\hat{\imath}', \hat{\jmath}'$, otra en términos de $\hat{v}, \hat{\imath}'$. Pero $\hat{v} = -\hat{\jmath}$. Por ende, podemos expresar todo en el mismo sistema de coordenadas con esta sustitución:

$$
(-m_2 g \cos\theta + T)\hat{\jmath}' + (-m_2 g \sin\theta + N)\overrightarrow{i'} = m_2 \overrightarrow{a}_2
$$

Resumiendo:

$$
\overrightarrow{a_1} = \begin{cases} a_{1x} = \frac{-m_1 g \sin\theta + T}{m_1} \\ a_{1y} = \frac{m_1 g \cos\theta + N}{m_1} \end{cases}, \qquad \overrightarrow{a_2} = \begin{cases} a_{2x} = \frac{-m_2 g \sin\theta + N}{m_2} \\ a_{2y} = \frac{-m_2 g \cos\theta + T}{m_2} \end{cases}
$$

Claramente, la aceleración que m_1 percibe en dirección de $\hat{\imath}'$ debe ser la opuesta de la que m_2 percibe en dirección $\hat{\jmath}'$. Es decir, se m_1 sube se debe cumplir que m_2 baja, y viceversa. Por ende,

$$\begin{aligned}
& a_{1x} = -a_{2y} \\
\iff \quad & \frac{-m_1 g \sin\theta + T}{m_1} = -\frac{-m_2 g \cos\theta + T}{m_2} \\
\iff \quad & -m_1 m_2 g \sin\theta + T m_2 = m_2 m_1 g \cos\theta - T m_1 \\
\iff \quad & T m_2 + T m_1 = m_2 m_1 g \cos\theta + m_1 m_2 g \sin\theta \\
\iff \quad & T(m_2 + m_1) = m_1 m_2 g \left(\sin\theta + \cos\theta\right) \\
\iff \quad & T = \frac{m_1 m_2 g \left(\sin\theta + \cos\theta\right)}{m_2 + m_1}
\end{aligned}$$

donde m_1, m_2 son desconocidos y por ende no veo sentido en simplificar con los valores numéricos de $\sin\theta, \cos\theta$ y g.

Habiendo expresado T en función de los datos del problema, concluimos que $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}$ como fueron definidos antes determinan completamente la aceleración de las masas.

¿Qué pasaría si las masas son idénticas? Las masas perciben la misma fuerza por parte de la tensión y por ende la diferencia radica en cuánto la gravedad afecte a cada una. Si las masas son las mismas, es fácil ver que la componente en $\hat{\jmath}'$ de la masa 2 es superior a la componente en $\hat{\imath}$ de la masa 1 (pues la pendiente de aquélla es más pronunciada que la de ésta). Por ende, la masa 2 bajaría por la pendiente arrastrando a la masa 1.

(c) Debe cumplirse que la acción de la gravedad en una masa equivalga *en magnitud* a la acción de la gravedad en la otra. Es decir, debe cumplirse

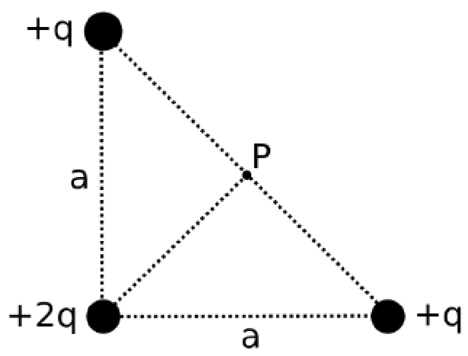
$$\begin{aligned}
& m_1 g \sin\theta = m_2 g \cos\theta \\
\iff \quad & m_2 = m_1 \tan\theta
\end{aligned}$$

La tensión de la cuerda quedaría

$$
\begin{aligned}
T &= \frac{m_1 m_1 \tan\theta g(\sin\theta + \cos\theta)}{m_1 \tan\theta + m_1} \\
&= g\frac{m_1^2 \tan\theta(\sin\theta + \cos\theta)}{m_1(\tan\theta + 1)} \\
&= gm_1 \cdot \frac{\frac{\sin^2\theta}{\cos\theta} + \sin\theta}{\tan\theta + 1} \\
&= gm_1 \frac{\sin\theta\,(\tan\theta + 1)}{\tan\theta + 1} \\
&= gm_1 \sin\theta
\end{aligned}
$$

que es una expresión sumamente simple.

2. En la figura se muestran tres partículas, dos con carga $+q$ y una con carga $+2q$. Las partículas con carga $+q$ se encuentran separadas de la partícula con carga $+2q$ por una distancia a. Calcule:
   (a) **(10 pts.)** El campo eléctrico $\vec{E}$ (dirección y magnitud) en el punto P.
   (b) **(10 pts.)** El potencial V en el punto P.
   (c) **(10 pts.)** ¿Qué puede comentar sobre las contribuciones que hacen las partículas con carga $+q$ al campo eléctrico y al potencial en el punto P?



(a) Debería ser obvio que los campos generados por las dos cargas unitarias se anulan y solo influye la carga $+2q$. Pero vamos a hacer todo bien formal de todos modos. Sea θ el ángulo entre la horizontal y la línea que va de $+2q$ a P. Sean $r_1 = r_2$ las distancias desde la carga superior izquierda e inferior derecha hacia P, y r_3 la distancia desde $+2q$ a P.

$$\overrightarrow{E_1} = \kappa\frac{q}{r_1^2}\hat{r_1}, \qquad \hat{r_1} = (\cos\theta, -\sin\theta)$$
$$\overrightarrow{E_2} = \kappa\frac{q}{r_2^2}\hat{r_2}, \qquad \hat{r_2} = (-\cos\theta, \sin\theta)$$
$$\overrightarrow{E_3} = \kappa\frac{2q}{r_3^2}\hat{r_3}, \qquad \hat{r_3} = (\cos\theta, \sin\theta)$$

Por lo tanto,

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{E} &= \sum_{i\in\{1,2,3\}} \overrightarrow{E_i} \\
&= \kappa q \left(\frac{1}{r_1^2}\hat{r_1} + \frac{1}{r_2^2}\hat{r_2} + \frac{2}{r_3^2}\hat{r_3} \right) \\
&= \kappa q \left(\frac{1}{r_1^2}\left(\hat{r_1} + \hat{r_2}\right) + \frac{2}{r_3^2}\hat{r_3} \right) \\
&= \kappa q \left(\frac{2}{r_3^2}\hat{r_3} \right) \\
&= \kappa \frac{2q}{r_3^2}\hat{r_3}
\end{aligned}
$$

tal como predijimos. La distancia r_3 es la mitad de la diagnoal de un cuadrado. La diagonal de un cadrado con lados a tiene longitud $d = \sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{2a^2} = a\sqrt{2}$. Por ende $r_3 = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. Por lo tanto

$$
\overrightarrow{E} = \kappa \cdot 2q \cdot 1/\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 \hat{r_3} = \kappa \cdot 2q \cdot \frac{4}{a^2 \cdot 2}\,\hat{r_3}
$$

Simplificando,

$$
\overrightarrow{E} = \kappa \frac{4q}{a^2}\,\hat{r_3}
$$

(b) Ya dijimos que $r_1 = r_2$ y es obvio que $r_2 = r_3$. Por principio de superposición el voltaje en P es la suma del voltaje generado en dicho punto por cada carga:

$$
\begin{aligned}
V &= V_1 + V_2 + V_3 \\
&= \kappa\frac{q}{r_1} + \kappa\frac{q}{r_2} + \kappa\frac{2q}{r_3} \\
&= \kappa q\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r} + \frac{2}{r}\right) && \left\{r = \frac{a\sqrt{2}}{2}\right\} \\
&= \frac{4\kappa q}{r} \\
&= 4\kappa q \cdot \frac{2}{a\sqrt{2}} \\
&= \frac{8\kappa q}{a\sqrt{2}}
\end{aligned}
$$

(c) No contribuyen nada al campo eléctrico. Al voltaje sí contribuyen, y contribuyen exactamente la mitad de lo que contribuye la carga $+2q$, por estar a la misma distancia que ésta del punto P y tener la mitad de la carga. En total, ambas cargas $+q$ sumadas contribuyen lo mismo que la carga $+2q$ al voltaje. Etc, yo qué sé!

(3) Termodinámica, salteado.

4. (20 pts.) Una partícula de masa m y carga q ingresa con una velocidad $\vec{v}$ a un solenoide de longitud l y que genera un campo $\vec{B}$ a lo largo de su eje de simetría axial. Al ingresar al solenoide, el vector velocidad es paralelo al eje de simetría axial. Si $m = 10^{-31}$ kg, $q = 10^{-19}$ C, $v = 10^6$ m/s, $l = 10$ cm y $B = 0{,}1$ T, calcule el ángulo de desviación en la trayectoria de la partícula al emerger del solenoide.

Pura trampa este ejercicio, los valores numéricos son superfluos. El campo $\overrightarrow{B}$ del soneloide es paralelo a su eje de simetría axial, digamos $\overrightarrow{B} = B\hat{\imath}$ en nuestro sistema de coordenadas (soneloide va de izquierda a derecha). La partícula entra a dicho soneloide en dirección paralela al eje de simetría. El ángulo entre $\overrightarrow{B}$ y $\overrightarrow{v}$ es por ende nulo. Por lo tanto,

$$\overrightarrow{F} = q(\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{B}) = 0$$

La partícula sale del soneloide en dirección paralela al eje de simetría sin sufrir desviamiento alguno. Es decir, el ángulo de desviación es cero.

12. Final 2021-12-07

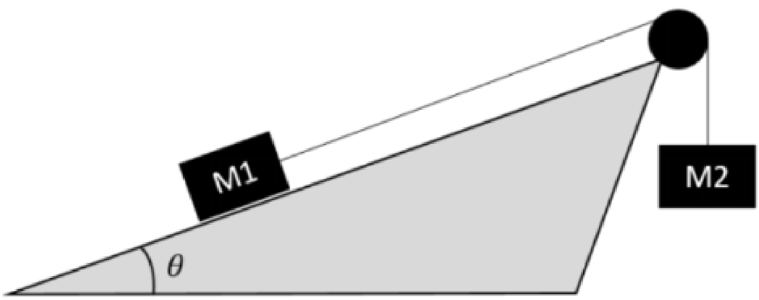
1. Una masa M_1 en un plano inclinado con rozamiento está unida a otra masa M_2 colgante mediante una cuerda ideal y una polea sin masa como se muestra en la figura a continuación. Teniendo en cuenta que $M_1 = M_2 = 1000$ gr, que el ángulo del plano inclinado es de 30° y que el coeficiente de rozamiento dinámico $\mu_d = 0{,}2$ mientras que el coeficiente de rozamiento estático $\mu_e = 0{,}4$, determinar:

(a) Bajo la configuración del problema, ¿el sistema está en movimiento? Justifique su respuesta

(b) La aceleración del sistema.

(c) La tensión de la cuerda.

(d) Si el sistema está en movimiento, determine el ángulo para el cual las masas quedan en equilibrio.



Solución. (a) Definimos

$$\hat{i'} = (\cos\theta, \sin\theta), \qquad \hat{j'} = (-\sin\theta, \cos\theta)$$

el sistema de coordenadas paralelo y perpendicular a la pendiente inclinada sobre la cual se apoya m_1. La aceleración a lo largo de la pendiente de m_1 es

$$a_{1x}m = -mg\sin\theta + T - R$$

y la de m_2 en sentido vertical es

$$a_{2y}m = -mg + T$$

Asumamos que el sistema está en equilibrio y por ende no hay fuerza de rozamiento. ¿Cuánta fuerza experimenta m_1 por obra de la tensión y la gravedad? Si hay equilibrio, $T = mg$ (la masa 2 está suspendida). Y como la masa uno experimenta la fuerza de la tensión en una dirección y la de la gravedad en la otra, la magnintud de fuerza neta que experimenta es

$$\begin{aligned} F_{\parallel} &= \left|T - G_{\parallel}\right| \\ &= |mg - mg\sin\theta| \\ &= mg\left[1 - \sin\theta\right] \\ &= 4{,}9N \end{aligned}$$

Pero $\mu_d \cdot N = \mu_d(0{,}4 \times \cos\theta \times 9{,}8) = 3{,}395\text{N}$. Como $4{,}9\text{N} > 3{,}395\text{N}$, hay movimiento.

(b) Sabemos que hay movimiento. Sabemos que $a_{1x} = -a_{2y}$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} & -mg\sin\theta + T - \mu_d\left(mg\cos\theta\right) = mg - T \\ \iff\quad & 2T = mg + mg\sin\theta + \mu_d(mg\cos\theta) \\ \iff\quad & T = \frac{mg\left[1 + \sin\theta + \mu_d\cos\theta\right]}{2} \\ \iff\quad & T \approx 8{,}199\text{N} \end{aligned}$$

Ahora que sabemos T, usamos

$$a_{1x}m = -mg\sin\theta + T - R, \qquad a_{2y}m = -mg + T, \qquad a_{1x} = -a_{2y}$$

Por ejemplo, reemplazando por el valor de T en a_{2y}, obtenemos

$$a_{2y} = \frac{-9{,}8\text{N} + 8{,}199\text{N}}{1\text{kg}} = -1{,}601\text{m/s}^2$$

(c) Ya lo hicimos.

(d) El sistema está en equilibrio si la fuerza neta experimentada por m_1 hacia arriba y hacia abajo de la pendiente se equilibran en magnitud. Es decir, si

$$mg\sin\theta + \mu_e(mg\cos\theta) = T$$

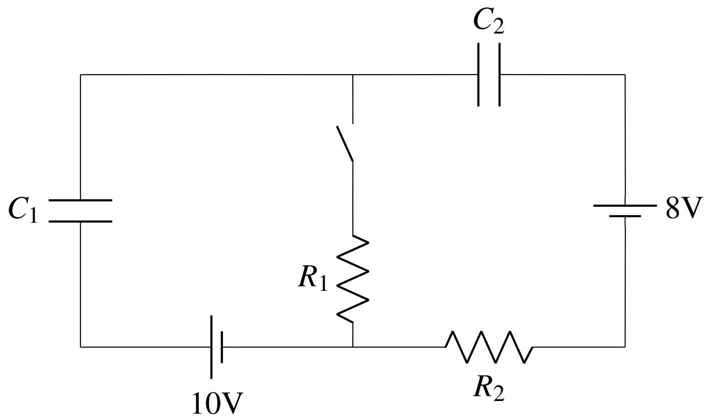
Ya dijimos que si el sistema está en equilibrio, $T = mg$, pues la masa 2 está suspendida. Por ende,

$$mg \sin\theta + \mu_d(mg\cos\theta) = mg$$

Esto se reduce a

$$\sin\theta + 0{,}4\cos\theta = 1$$

2. Considere el circuito que se muestra en la figura. Las características de los elementos del circuito son: $R_1 = R_2 = 20\Omega$, $C_1 = C_2 = 8\mu F$. La situación de la figura es estacionaria, es decir que no hay variación de corrientes con el tiempo. En un momento se cierra la llave y se deja evolucionar el sistema. Hallar:



(a) Las corrientes y caídas de tensión sobre cada uno de los elementos antes de cerrar la llave.

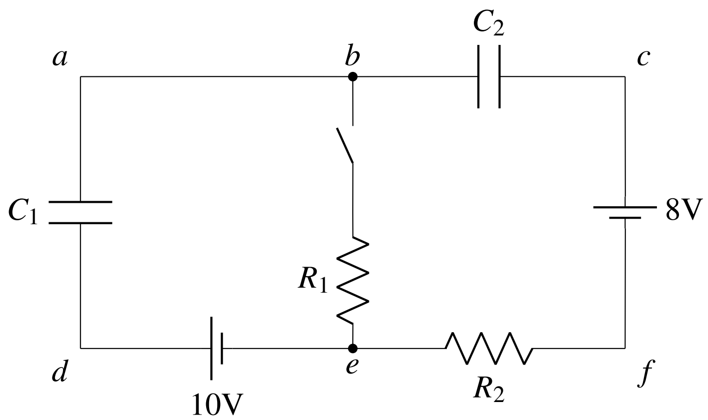
(b) Las cargas sobre los capacitores antes de cerrar la llave.

(c) Las corrientes en el instante en que se cierra la llave.

(d) Las corrientes luego de un tiempo muy posterior al cierre de la llave.

(e) La carga sobre cada capacitor luego de un tiempo muy posterior al cierre de la llave.

Solución. (a) Primero voy a nombrar los nodos relevantes como se muestra en la figura de abajo:



Defino el cable inferior derecho (nodo e) como el punto en que el voltaje es cero por convención (tierra). Como la situación es estacionaria, los capacitores están completamente cargados y no dejan pasar corriente. Como no hay corriente, las resistencias no generan voltaje alguno (trivial por Ley de Ohm) y por lo tanto el voltaje en f también es cero. Es obvio entonces que $V_c = 8V, V_d = 10V$. La forma más fácil de sacar el voltaje de los capacitores es observar que en el camino $d \to c$ el voltaje pasa de 10V a 8V, es decir hay una diferencia de potencial de 2V. Como el camino consiste en dos capacitores en serie, sus voltajes se reparten equitativamente. Por lo tanto, C_1 resta 1V y C_2 resta 1V. Así obtenemos no solo que $V_a = 9V$ sino que $V_{C_1} = V_{C_2} = 1V$.

(b) Los capacitores están plenamente cargados. Usando $V = Q/C \Rightarrow Q = VC$, la carga en cada uno satisface

$$Q = 1\text{V} \cdot 8\mu\text{F} = 8\mu\text{C}$$

(c) Se cierra la llave y en ese instante la corriente adquiere un nuevo camino $b \to e$. En el instante en que se cierra la llave, el voltaje en cada capacitor es 1V y $V_b = V_a = 9V$. La corriente I que intentaba fluir en el loop $d \to a \to c \to f \to d$ derepente se "parte" en el nodo b, con I_2 siguiendo hacia c e I_3 bajando hacia el nodo e.

La corriente I_3 que recorre $b \to e$ pasa por R_1 y cruza desde un voltaje de 9V (nodo b) a un voltaje de 0V (nodo e). Consecuentemente, el voltaje del resistor es $9V$. Por ley de Ohm, $I = \frac{V}{R}$. Por lo tanto, la corriente I_3 es

$$I_3 = \frac{V_{R_1}}{R_1} = \frac{9\text{V}}{20\Omega} = 0{,}45\text{A}$$

La corriente I_2 pasa por R_2, que tiene voltaje cero, y por ende es cero. Por lo tanto, $I = I_2 = 0{,}45$A. Esto tiene sentido físico: justo en el instante en que se cierra la llave, los capacitores siguen "tapados": toda la corriente debe ser la que se desvía a través dsel resistor R_1.

(d) La corriente será nula. Sí, la carga podrá redistribuirse por un tiempo a través del nuevo camino, pero eventualmente los capacitores volverán a "taparse" y la corriente volverá a ser cero.

(e) Para determinar la carga hay que encontrar el voltaje. El punto es que, si bien la corriente vuelve a ser nula eventualmente, los voltajes han cambiado. En particular, como la corriente es nula, la resistencia R_1 tiene un voltaje de cero (por Ley de Ohm). Es decir que el nodo b ahora tiene un voltaje de 0V (conectado a tierra). Esto significa que el nodo a debe tener un voltaje de 0V también. Por ende el voltaje de C_1 es 10V. El voltaje de c sigue siendo 8V y por ende el de C_2 es 8V. Las cargas entonces son:

$$Q_{C_1} = V_{C_1} C_1 = 10V \cdot 8\mu\text{F} = 80\mu\text{C}$$
$$Q_{C_2} = V_{C_2} \cdot C_2 = 8\text{V} \cdot 8\mu\text{F} = 64\mu\text{C}$$

(3) Termodinámica. Salteado.

13. Final 2009-2-27

(1) Un proyectil que tiene una masa de 50 g se incrusta en un bloque de madera de 2 kg. El bloque descansa sobre un plano inclinado de 15° y cuando el proyectil impacta en el bloque, este asciende 1 m sobre el plano antes de detenerse. Si el coeficiente de rozamiento entre el plano y el bloque es 0,3, determinar la velocidad inicial del proyectil.

Solución. Datos:

- $m_p = 0{,}05\text{kg}$
- $m_b = 2\text{kg}$
- $\mu_d = 0{,}3$
- $N = mg\cos\theta$

(a) Nos dicen que el proyectil "se incrusta" en el bloque. ∴ El choque es perfectamente plástico. ∴ Hay pérdida máxima de energía cinética y la velocidad del bloque en el momento de contacto equivale a la velocidad final del proyectil.

(b) La energía en el primer instante en que el bloque empieza a moverse es potencial (por la gravedad) y cinética (por el movimiento). La masa total, por la incrustación, es $m = m_p + m_b$.

$$E_1 = mgh + \frac{1}{2}mv_1^2$$

La energía cuando el bloque se detiene después de un metro es estrictamente potencial.

$$E_2 = mg(h + \sin\theta \text{ m})$$

con $\sin\theta$m la altura equivalente a un metro de recorrido por la pendiente de $\theta = 15°$.

(c) El rozamiento es una fuerza no-conservativa y realiza trabajo. ∴ Hay pérdida de energía. La diferencia en la energía total es el trabajo realizado por el rozamiento. Es decir,

$$E_2 - E_1 = W_R = \mu_d \cdot N \text{ 1m} = -\mu_d \cdot mg\cos\theta \text{ J}$$

(d) Sustituyendo E_2, E_1 en la ecuación anterior, y obviando unidades:

$$
\begin{aligned}
& mg\,(h+\sin\theta) - \left(mgh + \frac{1}{2}mv_1^2\right) = -\mu_d \cdot mg\cos\theta \\
\iff\quad & mgh + mg\sin\theta - mgh - \frac{1}{2}mv_1^2 = -\mu_d \cdot mg\cos\theta
\end{aligned}
$$

Notar que cada término está en Jules y por lo tanto al divdir por m (kilogramos) nos queda cada término en m^2/s^2:

$$
\begin{aligned}
& \frac{1}{2}v_1^2 = gh + g\sin\theta - gh + \mu_d \cdot g\cos\theta \\
\iff\quad & \frac{1}{2}v_1^2 = g\sin\theta + \mu_d \cdot g\cos\theta \\
\iff\quad & v_1 = \sqrt{2g\,(\sin\theta + \mu_d\cos h)}
\end{aligned}
$$

Hemos determinado la velocidad del bloque (con la masa incrustada) tras el impacto.

(e) El choque perfectamente inelástico (o plástico) satisface la siguiente propiedad:

$$
m_A v_{Ai} + m_B v_{Bi} = (m_A + m_B)v_f
$$

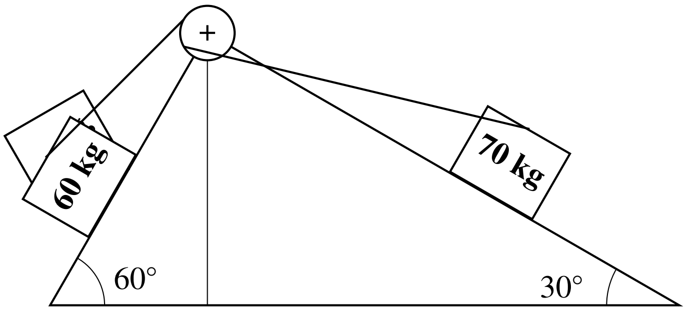
donde v_f es la velocidad adquirida por las masas A, B incrustadas. En nuestro caso, si hacemos E_0 el momento inicial,

$$
m_p v_{0p} + m_B v_{0b} = mv_1
$$

Pero la velocidad inicial del bloque es nula (se nos dice que "descansa"). Por lo tanto, obtenemos

$$
\begin{aligned}
& m_{p_v}0p = mv_1 \\
\iff\quad & v_{0p} = \frac{m_p + m_b}{m_p}v_1 \\
\iff\quad & v_{0p} = \frac{2{,}05\text{kg}}{0{,}05\text{kg}}\sqrt{2\cdot 9{,}8\,(\sin(15^\circ) + 0{,}3\cos(15^\circ))}\ \text{m/s} \\
\iff\quad & v_{0p} \approx 41\cdot 3{,}279\ \text{m/s} \\
\iff\quad & v_{0p} \approx 134{,}439\ \text{m/s}
\end{aligned}
$$

2 - Un cuerpo de 60 kg está en reposo sobre un plano inclinado 60° y está unido mediante una polea y cuerda sin masa a otro cuerpo de 70 kg que está en un plano inclinado 30°. Si el coeficiente de rozamiento en ambos planos es 0,1, determinar la aceleración del sistema y la tensión en la cuerda.



Solución. Sea m_1 la masa de 60kg, m_2 la de 70kg, $\alpha = 60°, \theta = 30°$. La fuerza que mueve a m_1 hacia abajo de su pendiente es (en magnitud) $m_1 g \sin\alpha \approx 509{,}222$. La que mueve a m_2 hacia abajo de su pendiente es (en magnitud) $m_2 g \sin\theta \approx 343$. "Gana la pulseada" m_1: el sistema se mueve hacia la izquierda: la masa 1 baja y la masa 2 sube. Por lo tanto:

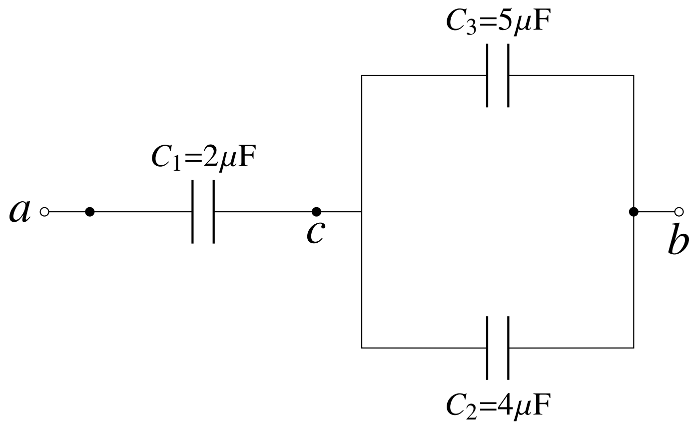
Si tomamos las dos masas como un único sistema, la fuerza neta que actúa sobre el mismo en dirección del movimiento satisface

$$\begin{aligned} a\,(m_1 + m_2) &= \overbrace{m_1 g \sin\alpha}^{\text{G sobre } m_1} + \overbrace{T - T}^{\text{T en } m_2 \text{ y } m_1} - R_1 - R_2 - \overbrace{m_2 g \cos\alpha}^{\text{G sobre } m_2} \\ a &= \frac{g}{m_1 + m_2}\left[m_1 (\sin\alpha - \mu_d \cos\alpha) - m_2 (\cos\alpha + \mu_d \sin\alpha)\right] \\ \iff \quad a &\approx 0{,}595 \text{ m/s}^2 \end{aligned}$$

La tensión sale fácil por segunda ley de Newton en la primera masa:

$$\begin{aligned} & 0{,}595 m_1 = m_1 g \sin\alpha - T - R_1 \\ \iff \quad & T = m_1 g \sin\alpha - \mu_d \cdot m_1 g \cos\alpha - 0{,}595 m_1 \\ \iff \quad & T \approx 444{,}123 \end{aligned}$$

3) Considere el sistema de capacitores mostrado en la figura.
La diferencia de potencial entre los puntos a y b es 1200V.



i) Calcule la carga en cada capacitor

ii) Calcule la diferencia de potencial entre los puntos a y c.

iii) En la figura de abajo, sean E_1 y E_2 de 2.0 volts y 4.0 volts respectivamente y sean las resistencias r_1, r_2 y R de 1,0 ohm, 2,0 ohms y 5,0 ohms respectivamente. ¿Cuál es la corriente que circula por este circuito? Grafique la diferencia de potencial a lo largo de todo el circuito

(i) El sistema se modela como dos capacitores en serie, el primero C_1 y el segundo C_{23} en paralelo. Los capacitores en serie tienen idéntica carga. Por ende $Q_1 = Q_{23}$. La capacitancia total es $V_t \times C_{eq}$ = 1963,6μC (es simple calcular la capacitancia total como 18/11μF).

Toda la carga tiene que pasar por C_1. Luego Q_1 = 1963,6μC. Toda la carga tiene que pasar por C_{23}, pero se distribiuye en los capacitores. El voltaje en el punto c es $V_c = Q_1/C_1$ = 981,8V.

14. Un ejercicio de final

Considere un circuito cerrado formado por una fuente de fuerza electromotriz (fem) constante $\mathcal{E}_s$, una resistencia R y una espira circular conductora, conectados en serie.

La espira se encuentra inmersa en una región donde existe un campo magnético **B** uniforme espacialmente, cuya dirección es perpendicular al plano de la espira y con sentido entrante (hacia el plano de la página). La magnitud del campo magnético varía con el tiempo según la siguiente función definida a trozos, donde t se mide en segundos:

$$B(t) = \begin{cases} 0 & 0 \leq t < 10 \\ \alpha t & 10 \leq t < 20 \\ 0 & 20 \leq t \leq 30 \end{cases}$$

donde α es una constante positiva.

Se conocen los siguientes parámetros del sistema:

- Fem de la fuente: $\mathcal{E}_s = 6\,\mu\mathrm{V}$.
- Corriente eléctrica medida en el circuito en ausencia de campo magnético ($t < 10\,\mathrm{s}$): $I_0 = 1{,}5\,\mathrm{mA}$.
- Corriente eléctrica medida durante la variación del campo ($10 \leq t < 20\,\mathrm{s}$): $I_B = 0{,}5\,\mathrm{mA}$.

El ejercicio pide:

1. Determine el valor de la resistencia R del circuito.
2. Calcule la magnitud y determine el sentido de la fem inducida ($\mathcal{E}_{\mathrm{ind}}$) en la espira durante el intervalo $10 \leq t < 20\,\mathrm{s}$. Justifique el sentido de la corriente inducida.
3. Halle el valor de la constante α del campo magnético.
4. Obtenga la expresión de la corriente total $I(t)$ para todo el intervalo $0 \leq t \leq 30\,\mathrm{s}$.

Solución. (1) La resistencia se obtiene de la ley de Ohm en el intervalo $0 \leq t < 10\,\mathrm{s}$, donde no hay campo magnético y por lo tanto no hay fem inducida. Por lo tanto, la única fem en el circuito es la de la fuente. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} R &= \frac{\mathcal{E}_s}{I_0} \\ &= \frac{6\mu\text{V}}{1{,}5\text{mA}} \\ &= \frac{6}{1{,}5} \cdot (10^{-6}/10^{-3})\Omega \\ &= 4 \cdot 10^{-3}\Omega \\ &= 4\text{m}\Omega \end{aligned}$$

(a) La FEM inducida en la espira se obtiene de la ley de Kirchhoff de las mallas. En el intervalo $10 \leq t < 20\,\text{s}$, la ley de Kirchhoff dice que la suma de las fem en el circuito es igual a la caída de tensión en la resistencia. El campo magnético asciende y por lo tanto la fem inducida se opone a ese aumento (Lenz). Por lo tanto, la fem inducida tiene sentido opuesto a la de la fuente. Por lo tanto,

$$\mathcal{E}_{\text{total}} = \mathcal{E}_s - \mathcal{E}_{\text{ind}} = IR$$

Cuando el campo magnético existe, I es conocida y R no cambia. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} & \mathcal{E}_s - \mathcal{E}_{\text{ind}} = I_B R \\ \iff \quad & \mathcal{E}_{\text{ind}} = \mathcal{E}_s - I_B R \\ \iff \quad & \mathcal{E}_{\text{ind}} = 6\mu\text{V} - 0{,}5\text{mA} \cdot 4\text{m}\Omega \\ \iff \quad & \mathcal{E}_{\text{ind}} = 6\mu\text{V} - 2\mu\text{V} \\ \iff \quad & \mathcal{E}_{\text{ind}} = 4\mu\text{V} \end{aligned}$$

(Notar que esto nos dice que el voltaje total es 2, lo cual vale si usamos la Ley de Ohm con I_B y R).

Ahora bien, para $10 \leq t \leq 20$,

$$\Phi_B(t) = \oint \mathbf{B}(t) \cdot d\mathbf{A} = B(t)\pi r^2 = at\pi r^2$$

Por ende,

$$\mathcal{E}_{\text{ind}} = -a\pi r^2$$

Por lo tanto, podemos obtener a como

$$
\begin{aligned}
& 4\mu\mathrm{V} = a\pi r^2 \\
\iff \quad & a = \frac{4\mu\mathrm{V}}{\pi r^2}
\end{aligned}
$$